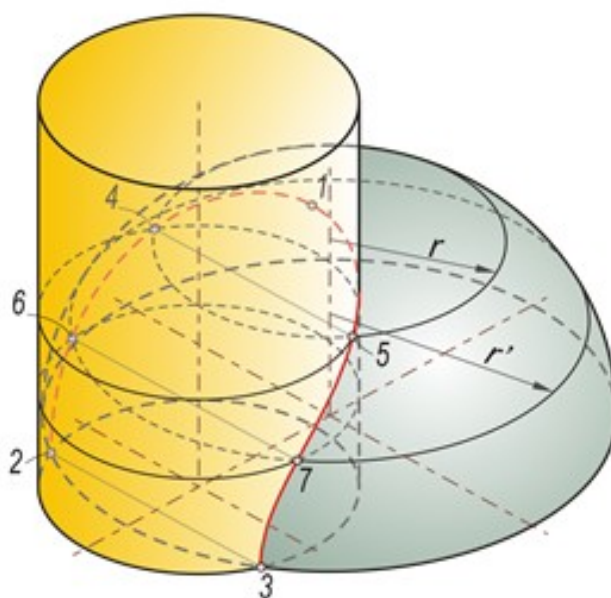


# Начертательная геометрия

## Модуль №1

**Содержательный модуль № 3 – Поверхности. Точка и линия на поверхности. Взаимное пересечение поверхностей**

### УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА имени А. Н. БЕКЕТОВА**

# **Начертательная геометрия**

## **Модуль 1**

**Содержательный модуль № 3 – Поверхности. Точка и линия на  
поверхности. Взаимное пересечение поверхностей**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Харьков – ХНУГХ им. А. Н. Бекетова – 2016**

УДК 514.18(075)  
ББК 22.151.3я73-6  
Л86

***Автор***

***Лусь Владимир Иванович***, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры инженерной и компьютерной графики Харьковского национального университета городского хозяйства имени А. Н. Бекетова

***Рецензент***

***Ю. М. Тормосов***, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой механики и графики Харьковского государственного университета питания и торговли

***Рекомендовано к печати Ученым советом***

***Харьковского национального университета городского хозяйства имени А. Н. Бекетова,  
протокол №10 от 24.04.2015 г.***

**Лусь В. И.**

Л86 Начертательная геометрия. Модуль 1 : учеб. пособие : в 3-х содержательных модулях / В. И. Лусь; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2014. –

Содержательный модуль №3. Поверхности. Точка и линия на поверхности. Взаимное пересечение поверхностей. – 2016. – 88 с.

Учебное пособие содержит полный курс теоретического материала для успешного освоения студентами 1 курса «Начертательная геометрия» – модуль № 1.

Учебный материал разбит на три содержательных модуля. Каждый содержательный модуль является логически завершенной частью, заканчивается контрольными вопросами и тестом с ответами для самоконтроля студента.

Для студентов по направлениям подготовки Строительство, Гидротехника, Электротехника и электротехнологии, Электромеханика.

УДК 514.18(075)  
ББК 22.151.3я73-6

© В. И. Лусь, 2016  
© ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2016

## Содержание

Введение .....	5
1 ПОВЕРХНОСТИ.....	7
1.1 Задание поверхности на комплексном чертеже.....	7
1.2 Определитель поверхности.....	7
1.3 Очерк проекции поверхности .....	8
1.4 Классификация поверхностей.....	8
1.5 Точка и линия на поверхности. Алгоритм конструирования поверхности .....	9
1.6 Задание линейчатых поверхностей на комплексном чертеже.....	11
1.6.1 Развертывающиеся поверхности.....	11
1.6.1.1 Многогранные поверхности .....	11
1.6.1.2 Комплексный чертеж пирамидальной поверхности.....	12
1.6.1.3 Комплексный чертеж призматической поверхности.....	14
1.6.1.4 Проецирующая призма .....	16
1.7 Задание кривых линейчатых поверхностей .....	16
1.7.1 Задание конической поверхности общего вида на комплексном чертеже.....	17
1.7.2 Задание цилиндрической поверхности общего вида на комплексном чертеже.....	19
1.8 Неразвертывающиеся линейчатые поверхности с двумя направляющими.....	21
1.8.1 Цилиндроид .....	22
1.8.2 Коноид.....	24
1.8.3 Гиперболический параболоид.....	25
1.9 Поверхности вращения .....	26
1.9.1 Свойства поверхности вращения .....	26
1.9.2 Комплексный чертеж поверхности вращения общего вида .....	27
1.9.3 Поверхности вращения второго порядка.....	30
1.9.3.1 Цилиндр вращения.....	30
1.9.3.2 Конус вращения .....	30
1.9.3.3 Сфера .....	31
1.9.3.4 Эллипсоид вращения .....	33
1.9.3.5 Параболоид вращения.....	34
1.9.3.6 Гиперболоид вращения.....	35
1.9.3.7 Тор – поверхность вращения 4 порядка .....	40
1.10 Винтовые поверхности.....	46
1.10.1 Прямой геликоид .....	47
1.10.2 Наклонный геликоид.....	47
1.11 Контрольные вопросы.....	50
1.12 Справочный материал.....	50

1.12.1 Задание плоскости на комплексном чертеже .....	50
1.12.2 Задание поверхности на комплексном чертеже .....	51
2 ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР .....	52
2.1 Характер пересечения поверхностей.....	53
2.2 Решение главных позиционных задач.....	55
2.2.1 Три случая. три алгоритма .....	55
2.2.2 Первый алгоритм .....	56
2.2.3 Второй алгоритм.....	58
2.3 Конические сечения .....	62
2.4 Третий алгоритм.....	73
2.4.1 Решение 1ГПЗ.....	73
2.4.2 Решение 2ГПЗ (в случае пересечения непроецирующих фигур) .....	77
2.4.3 Частные случаи пересечения поверхностей вращения второго порядка .....	82
2.4.3.1 Пересечение соосных поверхностей вращения .....	82
2.4.3.2 Теорема Монжа .....	83
2.4.4 Выводы.....	86
2.4.5 Контрольные вопросы .....	86
2.4.6 Тест №1 .....	86
2.4.7 Ответы на тест № 1 .....	87
Список источников .....	88

## ВВЕДЕНИЕ

Все машины, приборы, любые изделия состоят из отдельных деталей, соединенных между собой. Форму деталей машин образуют, главным образом, сочетание плоскостей и кривых поверхностей (цилиндрической, конической, сферической, торовой), расположенных в пространстве так, что они находятся друг относительно друга в определенном соотношении. Чаще всего они пересекаются, образуя общую для них линию. Поэтому главным этапом конструирования таких деталей является определение границ элементарных исходных поверхностей, которыми и являются линии их взаимного пересечения. Таким образом, задача построения линии пересечения двух поверхностей, достаточно часто встречающаяся в начертательной геометрии, имеет широкое практическое применение в конструкциях технических деталей. Линия пересечения двух поверхностей в общем виде представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две части и более.

Строится линия пересечения при помощи вспомогательных плоскостей или кривых поверхностей, которые называются посредниками. Выбор вспомогательной поверхности (посредника) определяется формой и положением пересекающихся поверхностей. В качестве посредников могут использоваться проецирующие плоскости, плоскости общего положения, цилиндрические, конические и сферические поверхности. Следует по возможности подбирать такие вспомогательные поверхности, которые в пересечении с данными поверхностями дают простые для построения линии (например, прямые или окружности). Каждый из посредников пересекает данные поверхности в общем случае по некоторым кривым, которые как лежащие в одной и той же плоскости или на одной и той же поверхности могут пересекаться между собой и тогда определяют одну или несколько точек, лежащих на линии пересечения поверхностей.

Обычно линию пересечения двух поверхностей строят по отдельным точкам. Сначала определяют опорные точки в пересечении контурных линий каждой поверхности с другой поверхностью. Это точки, проекции которых отделяют видимую часть проекции линии пересечения от невидимой, это проекции точек линии пересечения, наивысших и наинизших, ближайших и наиболее удаленных по отношению к зрителю, плоскости крайних слева и справа на проекциях линий пересечения.

Опорные точки позволяют видеть, в каких пределах расположены проекции линии пересечения и где между ними имеет смысл определить промежуточные точки. При этом нужно иметь в виду, что проекция линии пересечения всегда располагается в пределах площади наложения, т.е. общей площади проекций двух пересекающихся поверхностей.

Общее правило построения линии пересечения поверхностей заключается в следующем:

- определяют опорные точки в пересечении контурных линий каждой поверхности;
- выбирают вид вспомогательных поверхностей;

- строят линии пересечения вспомогательных поверхностей с заданными поверхностями;
- находят точки пересечения построенных линий и соединяют их между собой, т.е. определяют общие точки, принадлежащие пересекающимся поверхностям, которые определяют их линию пересечения.

В общем случае линия может принадлежать поверхности или не принадлежать. Линия принадлежит поверхности, если все ее точки принадлежат этой поверхности. Исключение составляет случай, когда линия представлена прямой, а поверхность – плоскостью. В этом случае для принадлежности прямой плоскости достаточно, чтобы хотя бы две точки ее принадлежали этой поверхности. Задачи построения линий, принадлежащих поверхности, входят составной частью в задачи построения линий пересечения поверхностей плоскостью и пересечения двух поверхностей.

Задача определения принадлежности точки поверхности решается следующим способом. Если заданы проекции элементов поверхности и точки, необходимо на одной из плоскостей проекций через заданную точку провести линию, принадлежащую поверхности, и построить проекцию этой линии на одной плоскости проекций. Если вторая проекция пройдет через вторую проекцию точки – точка принадлежит поверхности, если не пройдет – не принадлежит.

Принципы построения точек и линий на поверхностях положены в основу построения линий пересечения, срезов, вырезов, проницаний и др., что определяет построение сложных геометрических тел, и в итоге – деталей, узлов, машин, зданий, сооружений.

# 1 ПОВЕРХНОСТИ

## 1.1 Задание поверхности на комплексном чертеже

*Самая занимательная для нас поверхность на Земле – это человеческое лицо.*

*Г. Лихтенберг*

В этом разделе Вы узнаете, что поверхности подразделяются на линейчатые и нелнейчатые. Научитесь задавать и конструировать поверхности. Строить точки и линии по принадлежности поверхности. Узнаете, чем отличается цилиндрическая линейчатая поверхность от цилиндра вращения и цилиндроида.

**Как Вы думаете?**

1. Какая поверхность применялась для создания прожекторов и фар автомобилей?
2. Какая поверхность использовалась для создания конструкции радиомачты на Шаболовке высотой 160 м в 1921 году?
3. Принадлежит точка  $A$  поверхности  $\Sigma$ , или нет (рис. 1.1)?
4. Чем отличается сфера от шара?

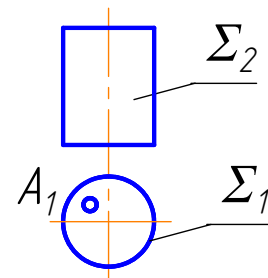


Рисунок 1.1

Мы живем в мире поверхностей - плоских и кривых, простых и сложных, созданных природой и рукой человека. Как их отобразить на чертеже?

Существует несколько способов задания поверхности: **аналитический, графический, кинематический.**

В начертательной геометрии чаще поверхность задают кинематически, как множество всех положений, перемещающееся по определенному закону линии в пространстве. Эта линия называется **образующей** –  $l$ . Как правило, она скользит по некоторой неподвижной линии, называемой **направляющей** –  $m$ , направляющих может быть одна или несколько.

Образующая  $l$ , скользя по неподвижной направляющей  $m$ , создает плотную сеть линий. Такое упорядоченное множество линий поверхности называется ее **каркасом**:

Каркасы бывают **непрерывными** – поверхность задана всем множеством образующих, или **дискретными**, когда имеется конечное число образующих.

При построении дискретного каркаса поверхности необходимо учитывать закон каркаса.

**Закон каркаса – это закон движения образующей.**

Любое тело ограничивается своей поверхностью. Тело, конечно и состоит из конкретного материала – металла, пластмассы, древесины. **Поверхность** является абстрактной фигурой, не имеющей толщины, т.е. образно говоря, это тонкая пленка, натянутая на каркас поверхности. Например, шар – тело, которое ограничено сферой – поверхностью.

## 1.2 Определитель поверхности

Минимальная информация, необходимая и достаточная для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже, есть определитель – **D** поверхности. Определитель состоит из двух частей:  **$D = G + A$** .



**Геометрическая часть –  $G$**  устанавливает набор геометрических фигур (геометрических элементов), участвующих в образовании поверхности, например:  $\Phi(m,s)$  (рис. 1.2);

**Алгоритмическая часть –  $A$**  устанавливает закон (характер) взаимодействия геометрических фигур в процессе образования поверхности, например:  $l \cap m, l \parallel s$  (рис. 1.2). При построении чертежа поверхности алгоритмической частью определителя является **закон каркаса поверхности**.

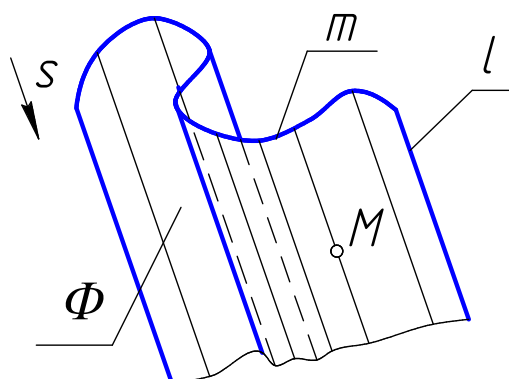


Рисунок 1.2 – Образование каркаса поверхности

### 1.3 Очерк проекции поверхности

На рисунке 1.3,а показана поверхность  $\Gamma$ , которую ортогонально проецируют на плоскость проекций  $\Pi_1$  (рис. 1.3,б). Проецирующие прямые касаются поверхности  $\Gamma$  и образуют цилиндрическую поверхность  $\Sigma \perp \Pi_1$ . Эти проецирующие прямые касаются поверхности  $\Gamma$  в точках, образующих некоторую линию  $m$ , принадлежащую  $\Gamma$ , называемую **контурной линией** данной поверхности. Проекция контурной линии на плоскость проекций называется **очерком проекции поверхности** –  $m_1$ .  $\Sigma \cap \Pi_1 = m_1$ .  $m_1$  – очерк поверхности на горизонтальную плоскость проекций (очертание, линия очерка, очерковая линия).

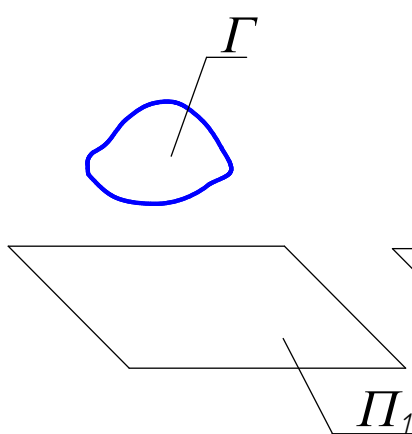


Рисунок 1.3,а

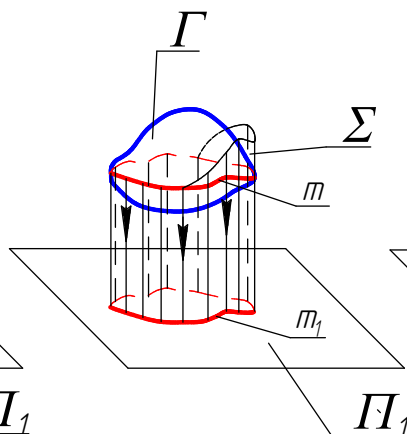


Рисунок 1.3,б

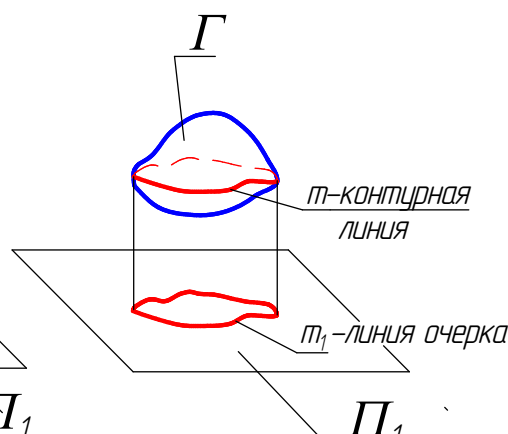


Рисунок 1.3,в

Таким образом, **очерком проекции поверхности** называется граница, которая отделяет проекцию поверхности от остальной части какой-либо плоскости проекций.

### 1.4 Классификация поверхностей

Мир поверхностей велик и разнообразен. Существует много подходов к вопросу классификации поверхностей. За основу классификации, чаще всего, принимаются форма образующей и закон ее перемещения в пространстве.

Надо иметь в виду, что одни и те же поверхности могут быть отнесены одновременно к нескольким типам. Например, цилиндрическая поверхность вращения как к поверхностям вращения, так и к линейчатым; прямой геликоид как к винтовым поверхностям, так и к линейчатым (винтовой коноид).

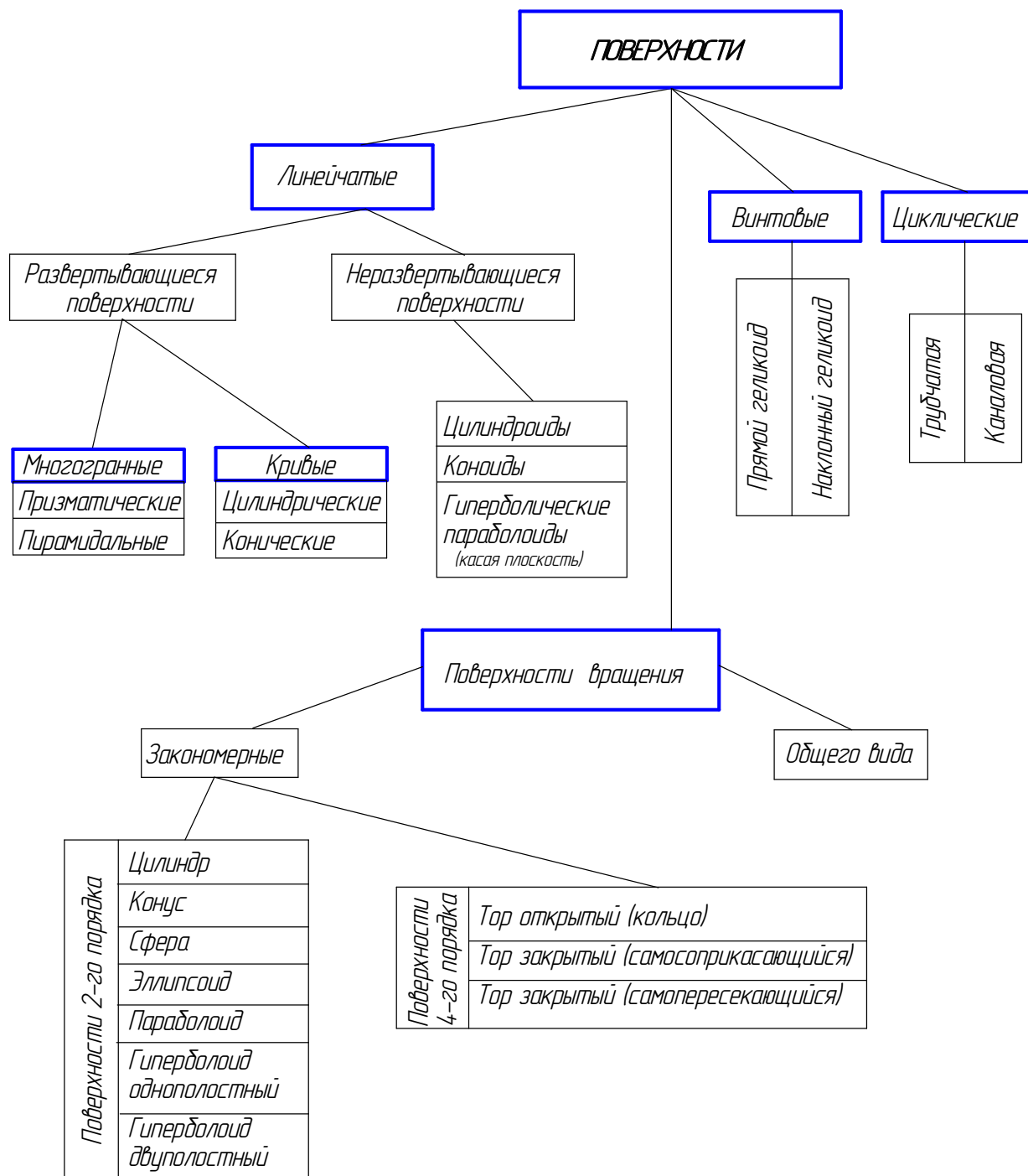


Рисунок 1.4 – Классификация поверхностей

## 1.5 Точка и линия на поверхности. Алгоритм конструирования поверхности

**Поверхность считается графически заданной на комплексном чертеже, если можно построить точку на поверхности.**

**Точка принадлежит поверхности,** если она принадлежит какой-нибудь линии, принадлежащей поверхности.

Следовательно, если точка принадлежит поверхности, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям некоторой линии этой поверхности.

Для построения точек, лежащих на поверхностях, пользуются графически простыми линиями (прямыми или окружностями) этой поверхности. В некоторых случаях применяют кривые, которые проецируются в графически простые линии.

**Линия принадлежит поверхности**, если все ее точки принадлежат поверхности. Если известна одна проекция линии, принадлежащей поверхности, и требуется построить вторую ее проекцию, то следует на известной проекции выбрать несколько точек, построить недостающие проекции и полученные проекции соединить линией. Выбор количества точек зависит как от размеров изображения, так и от сложности кривой. В большинстве случаев, чем больше точек выбирается на исходной проекции, тем выше точность построений второй проекции.

Примеры построения недостающих проекций точек и линий, принадлежащих поверхностям, рассмотрены ниже для каждой классификационной группы поверхностей.

Так какую линию лучше выбрать для построения точки на поверхности? Для линейчатых поверхностей выбирают **образующую**. Для других поверхностей выбирают графически простые линии, к которым относят **прямую и окружность**.

Напомним, что основным требованием, предъявляемым к чертежам, является их **обратимость** и **наглядность**. При задании поверхности только геометрической частью определителя можно построить, в принципе, каждую точку поверхности (примером может служить плоскость, заданная тремя точками).

Рассмотрим пример задания замкнутой треугольной пирамиды проекциями геометрической части определителя  $\Sigma(ABC, S)$  (рис. 1.5).

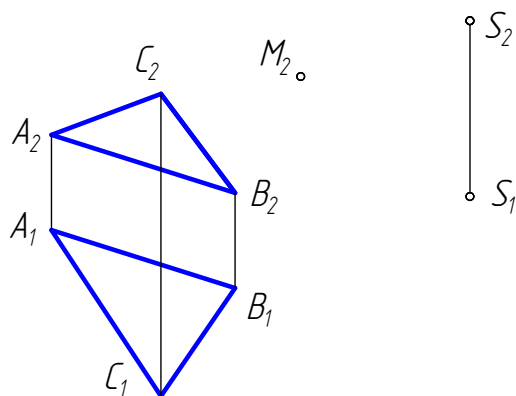


Рисунок 1.5 – Пример задания замкнутой треугольной пирамиды

Поверхность действительно задана, т.к. можно построить недостающую проекцию точки  $M(M_1)$  (рис. 1.6), т.е. чертеж обратим, но не является наглядным. Следовательно, необходимо дополнить чертеж поверхности ее очертаниями.

Поэтому конструировать поверхности будем с помощью построения дискретного каркаса, проекции которого обеспечат обратимость и наглядность чертежа поверхности.

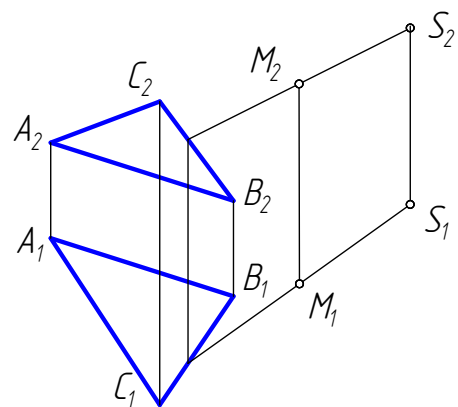


Рисунок 1.6 – Построить недостающей проекции точки  $M(M_1)$

**Сконструировать поверхность** – это значит построить проекции поверхности, состоящие из проекций определителя и проекций характерных линий, к которым относятся линии контура и линии обреза.

**Алгоритм (последовательность построения чертежа любой поверхности):**

1. Задать проекции элементов определителя (будем иметь в виду задание проекций геометрической части определителя).

2. Построить проекции дискретного каркаса, состоящего из конечного числа графически простых линий.
3. Построить проекции линии обреза, которые для образования поверхности существенной роли не играют, они лишь ограничивают, обрезают поверхность.
4. Определить видимость проекций поверхности.
5. Обвести видимые линии проекций поверхности сплошной толстой линией.

## 1.6 Задание линейчатых поверхностей на комплексном чертеже

### 1.6.1 Развертывающиеся поверхности

#### 1.6.1.1 Многогранные поверхности

**Многогранники** – геометрические тела, поверхность которых состоит из отсеков плоскостей, ограниченных многоугольниками.

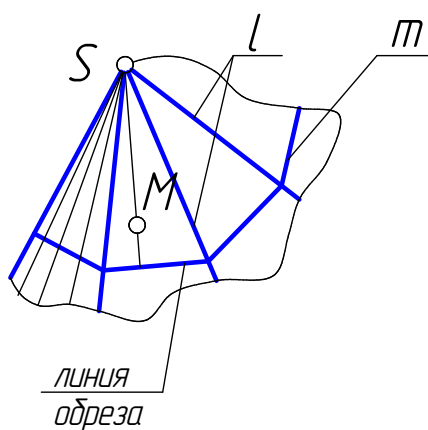


Рисунок 1.7,а

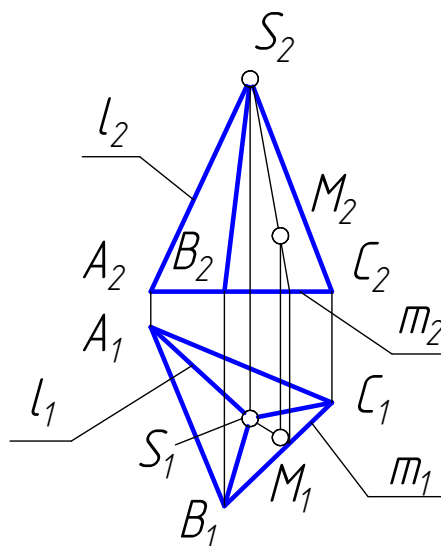


Рисунок 1.7,б

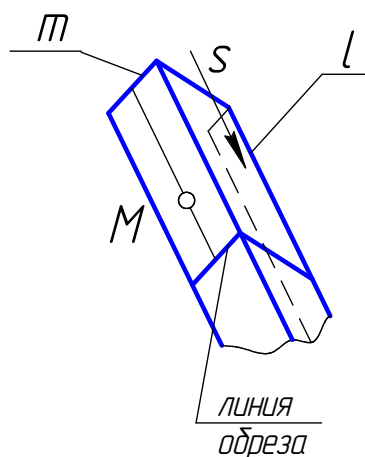


Рисунок 1.7,в

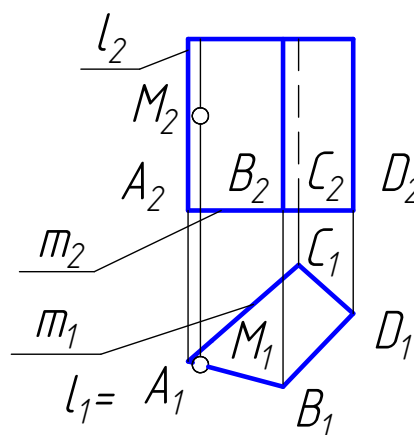


Рисунок 1.7,г

Эти многоугольники называются **гранями**, (например:  $ABS$  и  $BCS$  на рис 1.7,б); общие стороны смежных многоугольников – **ребрами** (например:  $AS, BS$  на рис. 1.7,б); верши-



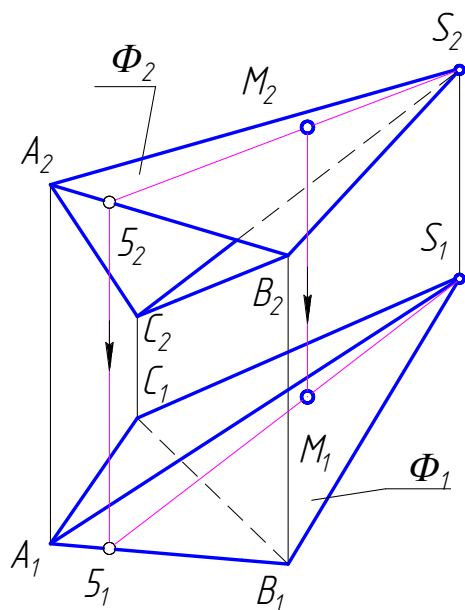


Рисунок 1.10 – Построение точки **M**, принадлежащей поверхности пирамиды

**Задача:** сконструировать пирамидальную поверхность общего вида  $\psi$ ,  $a(a_2) \subset \psi$ ,  $a_1 = ?$

Определитель поверхности:  $\psi(ABDC, S)$ ,  $l \cap ABCD$ ,  $l \supset S$ .

1. Задать (построить) проекции элементов определителя.

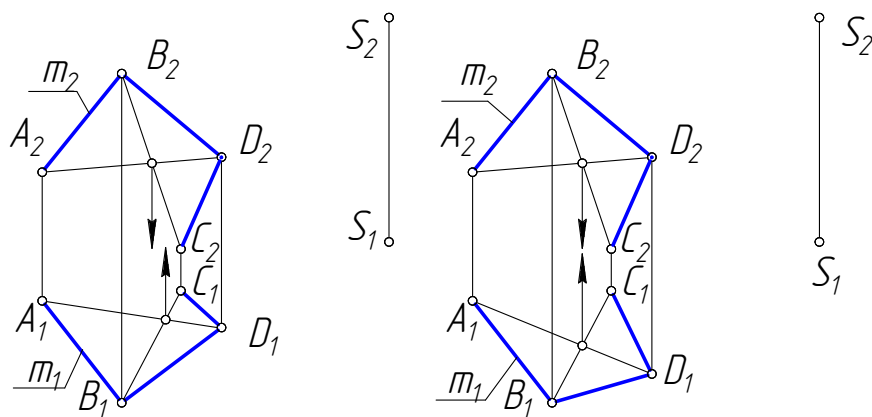


Рисунок 1.11 – Конструирование пирамидальной поверхности общего вида

Для удобства построения ломаную **ABDC** делаем плоской. Для этого проводим ее диагонали.

Поднимая или опуская одну из точек (**D**), добиваемся того, чтобы **m** стала плоской, (рис. 1.11).

2. Построить проекции поверхности (дискретный каркас) – это значит провести четыре образующих (ребра).

3. Построить проекции линии обреза, сама направляющая является линией обреза: **m(ABCD)** (рис. 1.12).

4. Определить видимость поверхности.

а) Относительно  $\Pi_2$ : точки **1** и **2** – фронтально конкурирующие.

б) Относительно  $\Pi_1$ : точки **3** и **4** горизонтально конкурирующие.

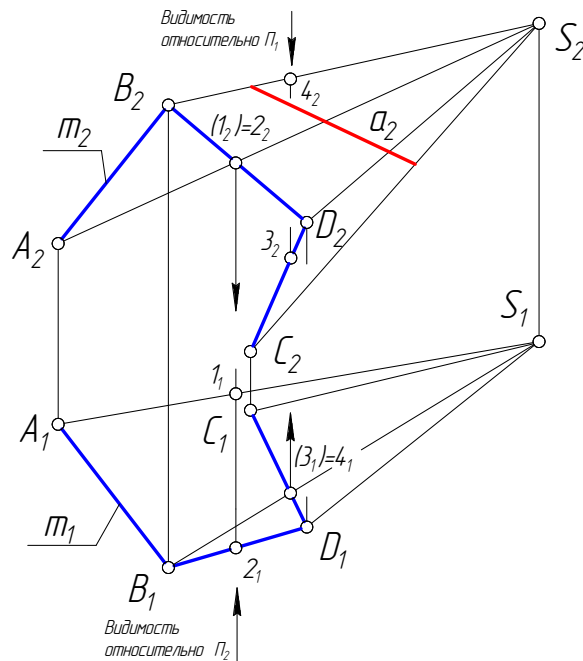


Рисунок 1.12 – Построение проекций линии обреза

5.  $a \subset \psi$ ,  $a_2 \supset 5_2$ ,  $6_2$ ,  $7_2$ ,  $8_2$  точки строятся по принадлежности образующим (ребрам), следовательно  $a_1 \supset 5_1$ ,  $6_1$ ,  $7_1$ ,  $8_1$  (рис. 1.13).

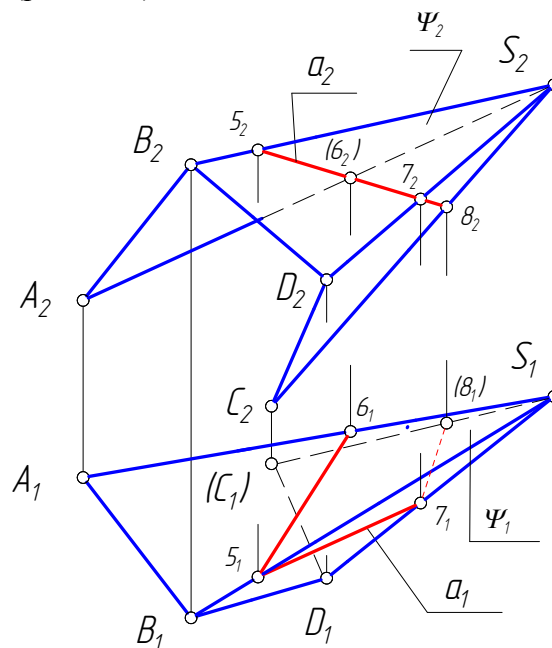


Рисунок 1.13 – Построение точек по принадлежности образующим

### 1.6.1.3 Комплексный чертеж призматической поверхности

Представим, что вершиной пирамидальной поверхности станет несобственная точка  $S_\infty$ , т.е. все ребра поверхности будут параллельны друг другу, тогда получим призматическую поверхность  $\Phi$  с направлением движения образующей –  $s$ .

Призматическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей ( $l$ ) по ломаной направляющей ( $m$ ), при этом всегда оставаясь параллельной некоторому направлению ( $s$ ).

**Задача:** сконструировать призматическую поверхность  $\Phi$  с дискретным каркасом из трех образующих,  $M(M_2)$ ,  $a(a_1) \in \Phi$ ,  $M_1$ ,  $a_2 = ?$  Определитель поверхности:  $\Phi(m, s)$ ;  $l \cap ABC$ ,  $l \parallel S$ .

### Алгоритм построения

1. Задать проекции элементов определителя (рис. 1.14).

2. Построить проекции поверхности. Длины ребер возьмем одинаковыми (рис. 1.15):

а. Провести фронтальные проекции образующих из точек  $A_2B_2C_2 \parallel s_2$ , отложить на них отрезки одинаковой длины:  $A_2A_2^1$ ,  $B_2B_2^1$ ,  $C_2C_2^1$ ,  $A_2^1B_2^1C_2^1$  – проекция линии обреза;

б. Провести горизонтальные проекции образующих из точек  $A_1B_1C_1 \parallel s_1$ ;

в. Построить в проекционной связи с  $A_2^1B_2^1C_2^1 \Rightarrow A_1^1B_1^1C_1^1$ .

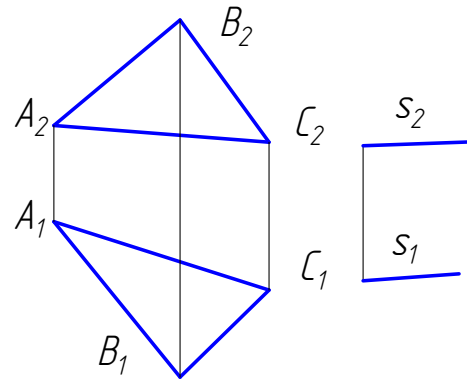


Рисунок 1.14 – Проекции элементов определителя

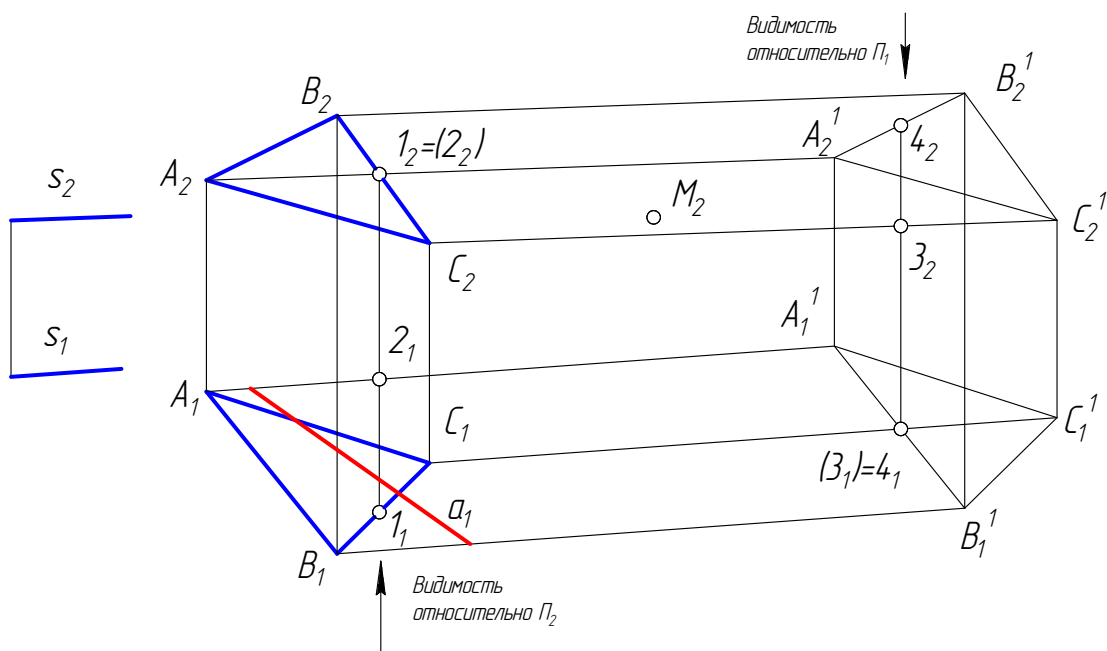


Рисунок 1.15 – Построение проекции пирамидальной поверхности

3.  $A_1^1B_1^1C_1^1$  и  $A_2^1B_2^1C_2^1$  – проекции линии обреза.

4. Определить видимость поверхности:

а. Относительно  $\Pi_1$ : точки 1 и 2 – фронтально конкурирующие;

б. Относительно  $\Pi_2$ : точки 3 и 4 – горизонтально конкурирующие.

5. Построить  $M \in \Phi$  (рис. 1.16). Точка  $M$  принадлежит грани  $BCBC$ , т.к.  $M_2$  задана видимой. Через  $M_2$  проводят  $l_2 \parallel s_2$ , через точку  $9(9_1, 9_2)$  строят  $l_1 \parallel s_1$ , из точки  $M_2$  проводят линию связи на  $l_1 \Rightarrow M_1$ , которая частично невидима, т.к. горизонтальная проекция грани  $B_1C_1B_1C_1$  – невидима (рис. 1.16).

6. Построить  $a(a_2) \in \Phi$ , ломаную линию  $a$  строят по принадлежности ее звеньев соответствующим граням, для этого на  $a$  отмечают точки пересечения с ребрами 5<sub>1</sub>, 6<sub>1</sub>, 7<sub>1</sub>, 8<sub>1</sub>. Из каждой точки проводят линию связи до пересечения с соответствующими ребрами, (рис. 1.16).

Видимость  $a_2$  определяется видимостью граней, которым принадлежат звенья ломаной линии.



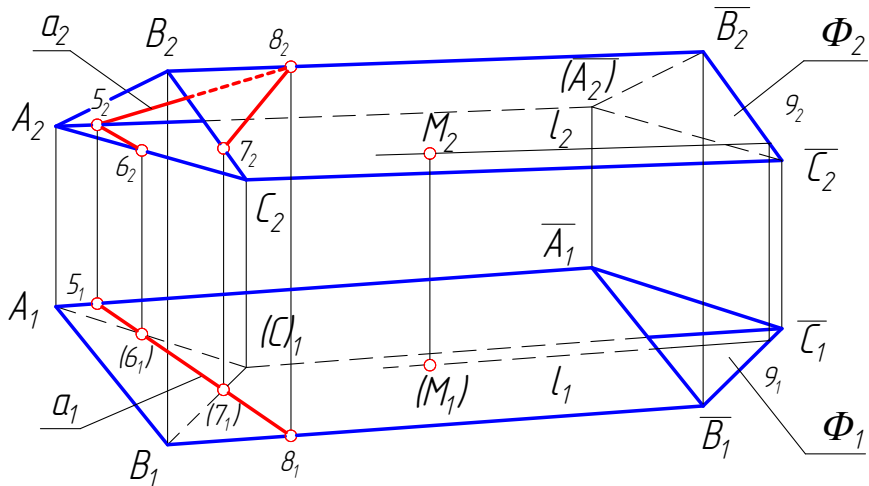


Рисунок 1.16 – Построение точки **М** и ломаной линии **а**, принадлежащих призматической поверхности **Φ**

#### 1.6.1.4 Проецирующая призма

У призматической поверхности все ее образующие (ребра) параллельны ( $l \parallel s$ ). Если направление  $s$  совпадает с направлением проецирования, то поверхность займет **проецирующее** положение. При этом ее ребра на  $\Pi_I$  (рис. 1.17) спроецируются в точки –  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ , а грани в отрезки –  $1_1 2_1$ ;  $2_1 3_1$ ;  $3_1 4_1$ ;  $4_1 1_1$ .

Если  $\psi \perp \Pi_I$ , то ее горизонтальная проекция  $\psi_I$  вырождается в линию, которая обладает **собирательными свойствами** и называется **главной проекцией**:  $\psi \perp \Pi_I$ ,  $M(M_2)$ ,  $a(a_2)$ , значит  $M_I$ ,  $a_I = \psi_I$ .

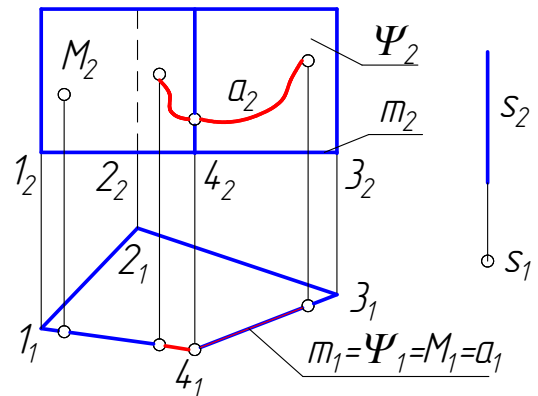


Рисунок 1.17 – Проецирующая призма

Призма может занимать горизонтально, фронтально, профильно проецирующие положения.

### 1.7 Задание кривых линейчатых поверхностей

Продолжаем изучение линейчатых поверхностей. У линейчатых кривых поверхностей образующая –  $l$  также является прямой линией, а направляющая –  $m$  (в отличие от ломаной у гранных) кривая линия. Как гранные, так и кривые линейчатые поверхности относятся к развертывающимся, они могут без деформаций (без складок и разрывов) совмещаться с плоскостью (рис. 1.18; 1.19).

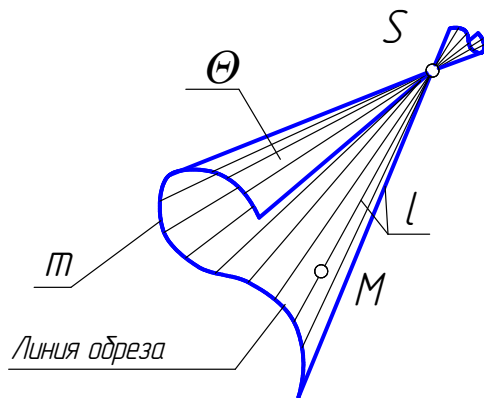


Рисунок 1.18 – Коническая поверхность общего вида

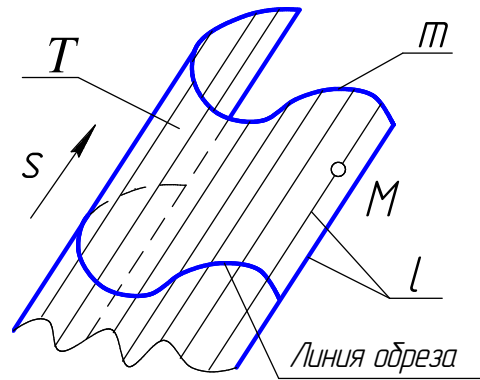


Рисунок 1.19 – Цилиндрическая поверхность общего вида

### 1.7.1 Задание конической поверхности общего вида на комплексном чертеже

Коническая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей ( $l$ ) по кривой направляющей ( $m$ ) в каждый момент движения, проходя через некоторую фиксированную точку ( $s$ ).

**Задача:** сконструировать коническую поверхность общего вида  $\Phi$ ;  $M(M_2)$ ,  $a(a_1) \subset \Phi$ ,  $M_1$ ,  $a_2 = ?$

Определитель поверхности:  $\Phi(m, S)$ ;  $l \cap m, l \supset S$ .

1. Задать проекции элементов определителя:  $\Phi(m, S)$  (рис. 1.20).

2. Построить дискретный каркас из 6 образующих на  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис. 1.21):

точками  $1_1, 2_1, 4_1$  – обозначены точки, принадлежащие очерковым образующим на горизонтальной проекции, при этом  $4_1$  является точкой касания очерковой к направляющей  $m_1$ ;

точками  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$  – обозначены точки, принадлежащие очерковым образующим на фронтальной проекции, при этом  $3_2, 4_2$  являются точками касания очерковых образующих к направляющей  $m_2$ .

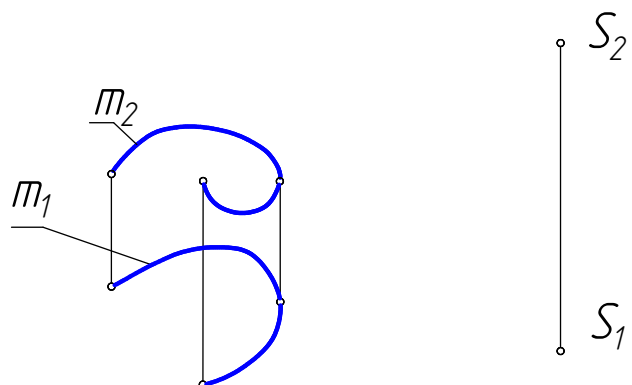


Рисунок 1.20 – Конструирование конической поверхности общего вида

3. Определить видимость (рис. 1.21):

- Относительно  $\Pi_1$  точки 5 и 6 – фронтально конкурирующие.
- Относительно  $\Pi_2$  точки 7 и 8 – горизонтально конкурирующие.

4. Построить линию обреза, в данном случае сама  $m$  является линией обреза.

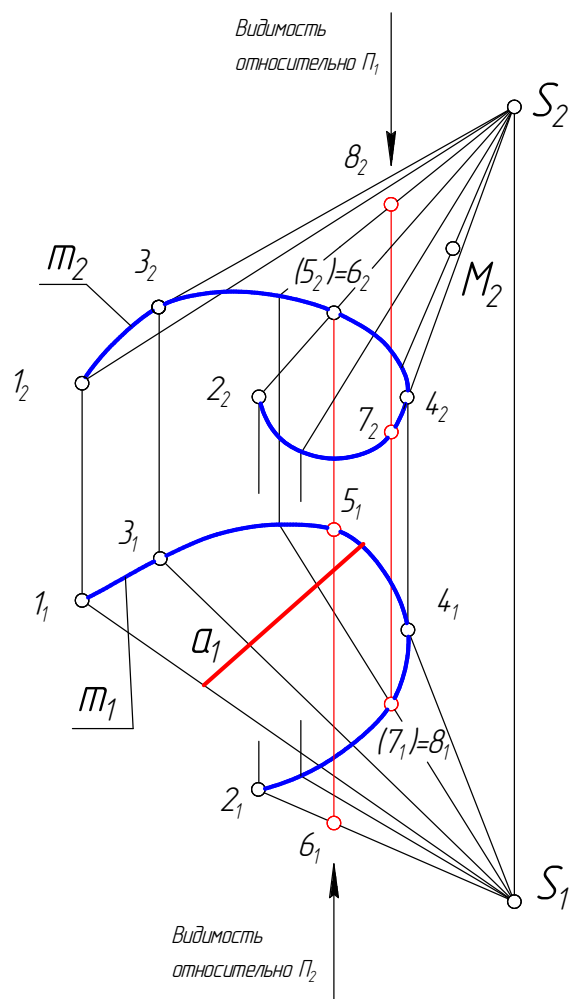


Рисунок 1.21 – Построение дискретного каркаса

5. Чтобы построить  $M_1$  (рис. 1.22), через  $M_2$  проводят образующую и строят ее горизонтальную проекцию, т.к. горизонтальная проекция образующей является невидимой, то точка  $M_1$  будет невидимой.

6. Чтобы построить  $a_2$  (рис. 1.22), на  $a_1$  отмечают несколько точек (чем больше, тем точнее будет построена кривая) и строят их по аналогии с точкой  $M$ , определяют видимость  $a_2$ .

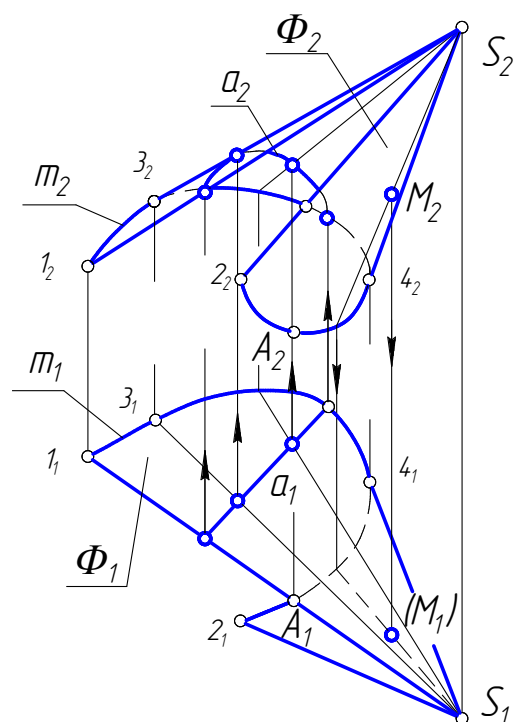


Рисунок 1.22 – Построение точки  $M$  и линии  $a$ , принадлежащих конической поверхности

## 1.7.2 Задание цилиндрической поверхности общего вида на комплексном чертеже

Цилиндрическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей ( $l$ ) по кривой направляющей ( $m$ ) в каждый момент движения, оставаясь параллельной заданному направлению ( $s$ ).

**Задача:** сконструировать цилиндрическую поверхность общего вида  $\Theta$ ,  $M(M_2)$ ,  $a(a_1) \subset \Phi$ ,  $M_1$ ,  $a_2 = ?$

Определитель поверхности:  $\Theta(m, s); l \cap m, l \parallel s$

1. Задать проекции элементов определителя:  $\Theta(m, s)$  (рис. 1.23).

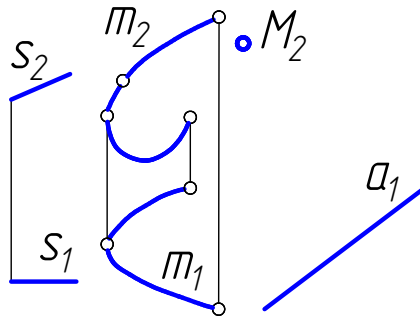


Рисунок 1.23 – Проекции элементов определителя

2. Построить две проекции дискретного каркаса поверхности из пяти образующих.

а. Прямая  $s(s_1 s_2)$ , определяющая направление движения образующей, занимает положение фронтали. На фронтальной проекции направляющей  $m_2$  берется несколько точек ( $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$ ), положение точки  $4_2$  определяется образующей, касательной к  $m_2$ . Из всех точек проводятся линии связи, определяющие положение горизонтальных проекций этих точек ( $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$ ).

б. Из точек ( $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$ ) проводятся образующие, параллельные  $s_2$  (рис. 1.24).

в. Из точек ( $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$ ) проводятся образующие, параллельные  $s_1$  (рис. 1.24).

г. На  $\Pi_2$  строится линия обреза. Длина образующих выбирается одинаковой (можно задать в мм, например, 45 мм). Образующие на  $\Pi_2$  проецируются без искажения, как фронталы.

д. Линия обреза на  $\Pi_1$  строится по точкам в проекционной связи.

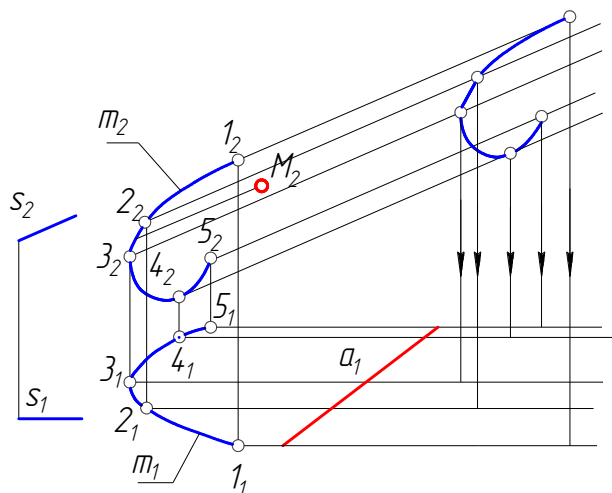


Рисунок 1.24 – Построение двух проекций дискретного каркаса поверхности

3. Построить горизонтальную проекцию линии обреза, определить видимость поверхности (рис. 1.25), с помощью конкурирующих точек  $A$  и  $B$  или рассуждая о положении образующих на  $\Pi_1$  относительно  $\Pi_2$ . Образующая, проходящая через точку  $1_1$ , ближе к наблюдателю, чем образующая, проходящая через  $5_1$ , поэтому на  $\Pi_2$  образующая  $5_2$  будет **невидима**.

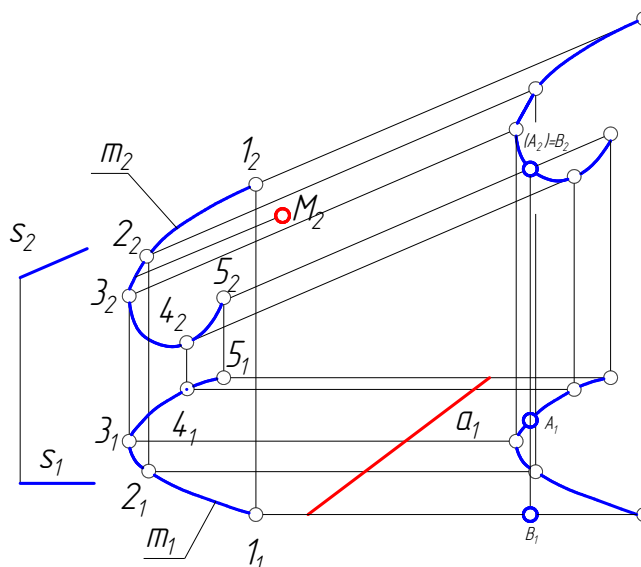


Рисунок 1.25 – Построение горизонтальной проекции линии обреза

4. Обвести поверхность с учетом видимости. Чтобы построить  $M_1$ , нужно через  $M_2$  провести образующую и построить ее горизонтальную проекцию (рис. 1.26).

Чтобы построить  $a_2$ , нужно отметить точки пересечения  $a_1$  с образующими поверхности, построить фронтальные проекции этих точек и соединить плавной кривой с учетом видимости.

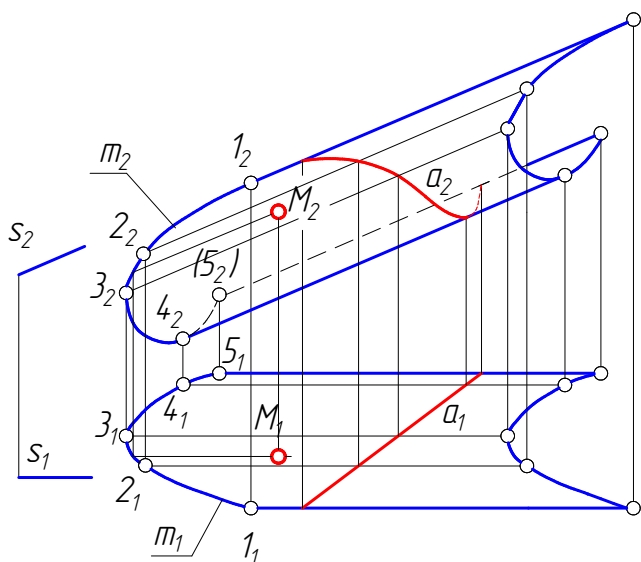


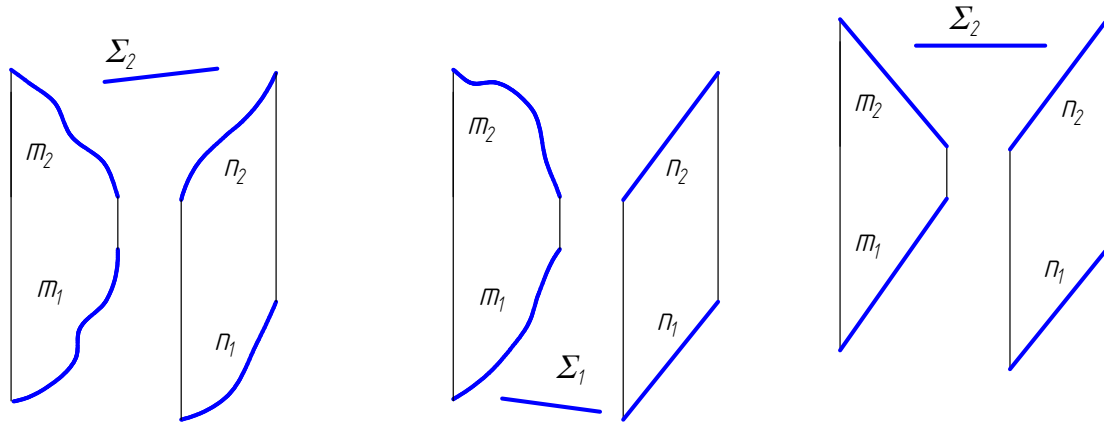
Рисунок 1.26 – Построение точки  $M$  и линии  $a$ , принадлежащих цилиндрической поверхности

## 1.8 Неразвертывающиеся линейчатые поверхности с двумя направляющими

К ним относятся поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана).

Линейчатые поверхности с двумя направляющими ( $m, n$ ), у которых образующая прямая линия ( $l$ ) в каждый момент движения, пересекая направляющие, остается параллельной некоторой неподвижной плоскости, называемой плоскостью параллелизма.

Различают три вида таких поверхностей:



1. **Цилиндроид** – если направляющими являются две кривые линии (плоские или пространственные) (рис. 1.27, 1.28).

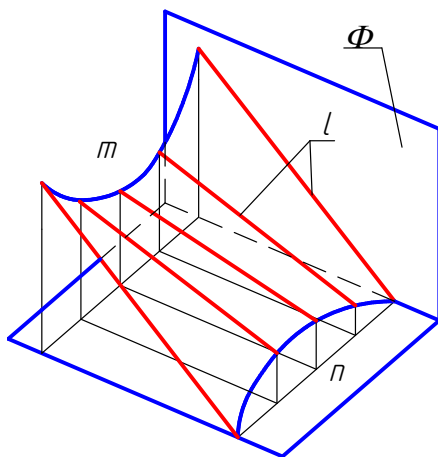


Рисунок 1.27 – Цилиндроид (направляющими являются две плоские кривые линии  $m$  и  $n$ )

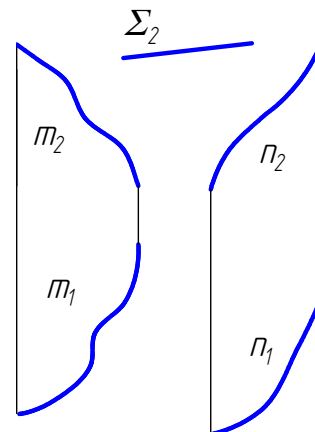


Рисунок 1.28 – Цилиндроид (направляющими являются две пространственные кривые линии  $m$  и  $n$ )

2. **Коноид** – если одна из направляющих прямая линия, а вторая – кривая (рис. 1.29).

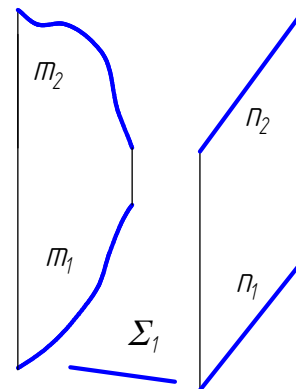


Рисунок 1.29 – Коноид

3. **Гиперболический параболоид** (косая плоскость) – если обе направляющие – прямые линии (рис. 1.30).

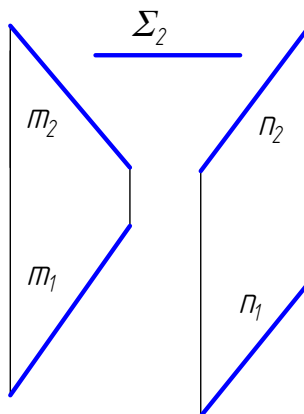


Рисунок 1.30 – Гиперболический параболоид

### 1.8.1 Цилиндроид

#### Алгоритм построения цилиндроида

Для построения образующих (если поверхность уже сконструирована) проводят ряд плоскостей, параллельных плоскости параллелизма, и определяют точки их пересечения с направляющими ( $m, n$ ) (рис. 1.31).

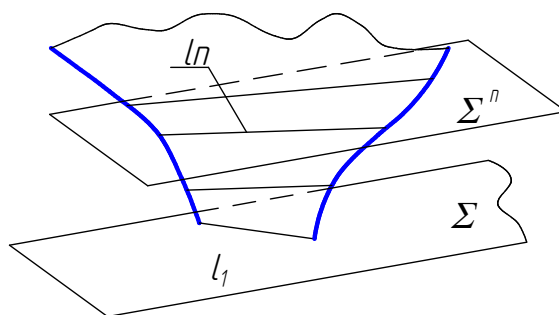


Рисунок 1.31 – Построение образующих цилиндроида

Для удобства построения часто за плоскость параллелизма принимают одну из плоскостей проекций, тогда образующие становятся линиями уровня.

**Задача:** сконструировать поверхность  $\Phi$  – цилиндرويد,  $M \subset \Phi$ ,  $M_I = ?$

1. Задать проекции элементов определителя:  $\Phi(m, n, \Pi_I)$  (рис. 1.32) ;

2. Построить проекции поверхности – дискретный каркас из пяти образующих:  $l \cap m, l \cap n, l \parallel \Pi_I$ .

Задать проекции элементов определителя  $m(m_1, m_2); n(n_1, n_2)$ .

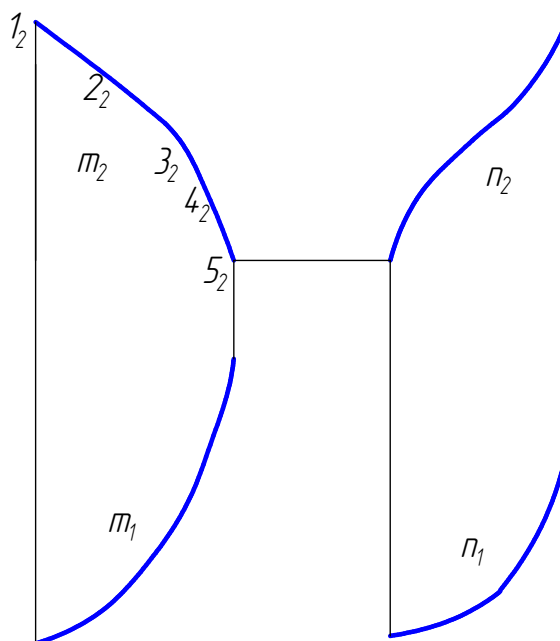


Рисунок 1.32 – Проекции элементов определителя

а) На  $m_2$ , например, взять 5 точек (но чем больше, тем точнее построение поверхности) ( $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$ ) (рис. 1.33);

б) Через эти точки провести пять  $l \parallel \Pi_1 \Rightarrow 6_2, 7_2, 8_2, 9_2, 10_2$  (рис. 1.34), все  $l_2 \perp$  линиям связи, т.е. образующие занимают положение горизонталей.

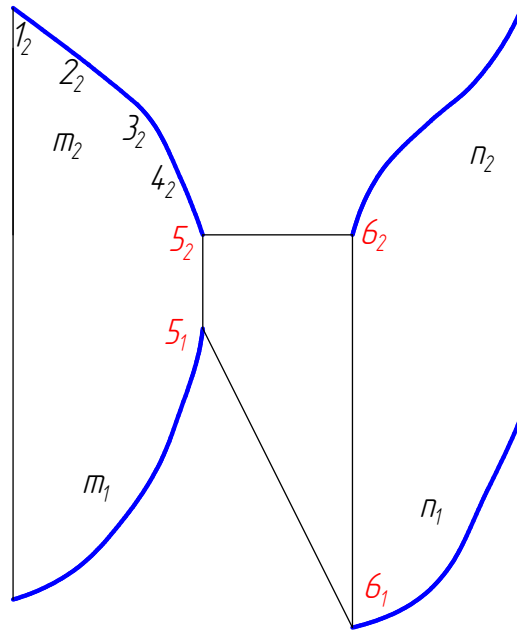


Рисунок 1.33 – Построение образующей (горизонталь)

в) Построить горизонтальные проекции этих точек на  $m_1$  и  $n_1$ ;

г) Построить горизонтальные проекции образующих, соединяя:  $1_1-10_1$ ;  $2_1-9_1$ ;  $3_1-8_1$ ;  $4_1-7_1$ ;  $5_1-6_1$  (рис. 1.34).

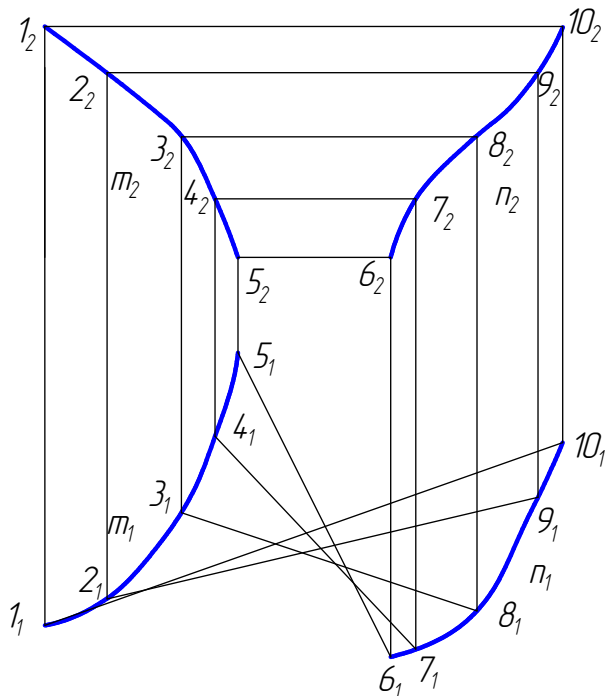


Рисунок 1.34 – Построение горизонтальных проекций образующих



3. Линиями обреза являются образующие **1-10, 5-6**.

4. Определить видимость (рис. 1.35).

а) Относительно  $\Pi_2$  все образующие видимы;

б) Относительно  $\Pi_1$ : образующая **1<sub>2</sub>10<sub>2</sub>** выше всех, поэтому она видима на  $\Pi_1$ . Другим способом: точки **A** и **B** – горизонтально конкурирующие. Обвести проекции поверхности плавной огибающей кривой, учитывая, что это линейчатая, но кривая поверхность (рис. 1.36).

5. Для построения  $M_1$  необходимо провести дополнительную образующую  $C_2D_2 \rightarrow C_1D_1$ ,  $M_1 \in C_1D_1$ .

Проекции коноида (рис. 1.37) и гиперболического параболоида (рис. 1.38) строятся аналогично цилиндроиду.

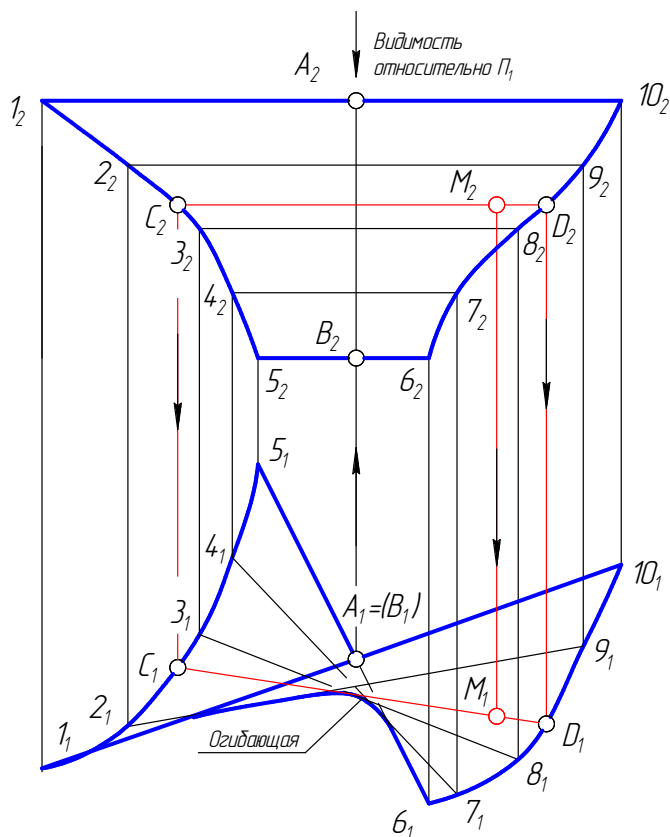


Рисунок 1.35 – Построение точки М, принадлежащей цилиндроиду

## 1.8.2 Коноид

$T(m, n, \Pi_2)$

$M(M_2) \in T, M_1 = ?$

Закон каркаса:  $l \cap m, l \cap n$  ( $n \perp \Pi_2$ ),  $l \parallel \Pi_2$ ,

Задать проекции элементов определителя  $m(m_1, m_2); n(n_1, n_2)$ .

$n$  – фронтально проецирующая прямая.

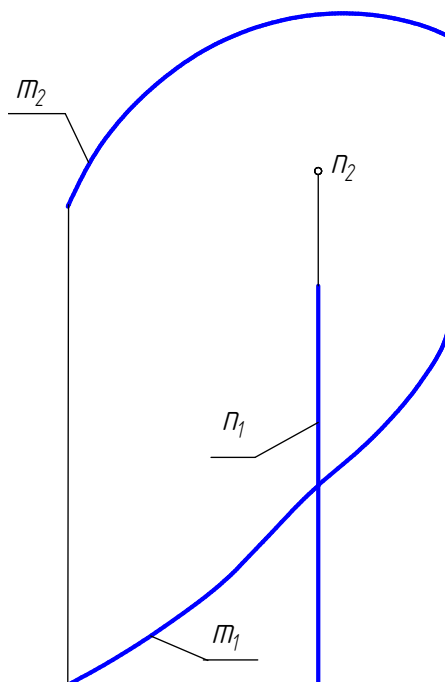


Рисунок 1.36 – Проекции элементов определителя

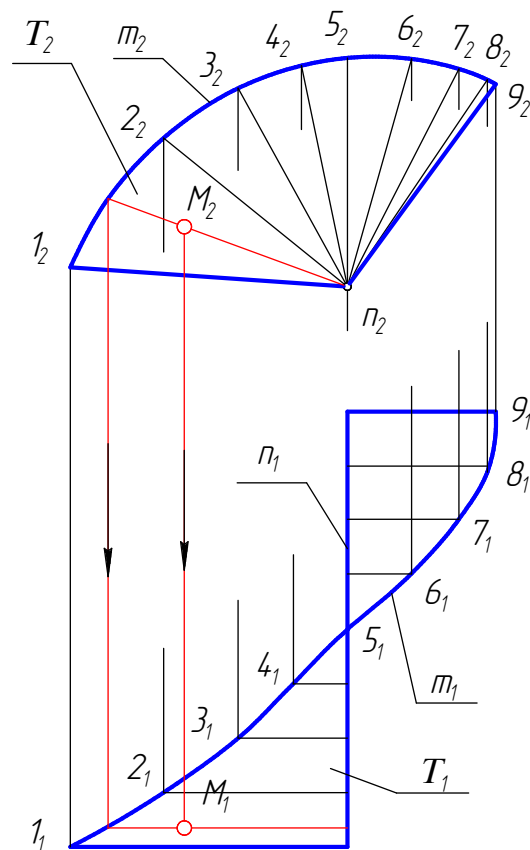


Рисунок 1.37 – Построение образующих (фронтолы) и точки **M**

### 1.8.3 Гиперболический параболоид

$\Gamma(m, n, \Psi) a(a_2) \in \Gamma, a_1 = ?$

Закон каркаса:  $l \cap m, l \cap n, l \parallel \Psi$

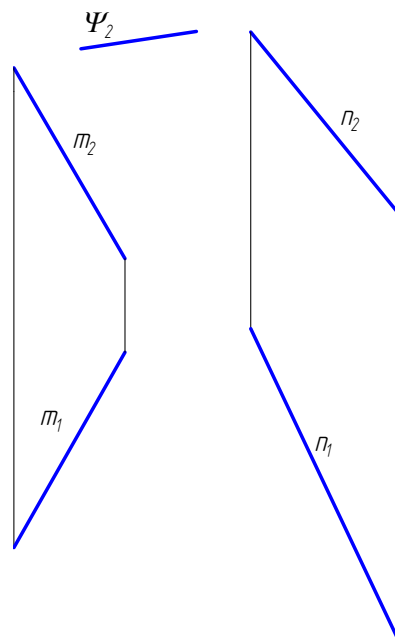


Рисунок 1.38 – Проекция элементов определителя

Задать проекции элементов определителя  $m(m_1, m_2); n(n_1, n_2)$ .

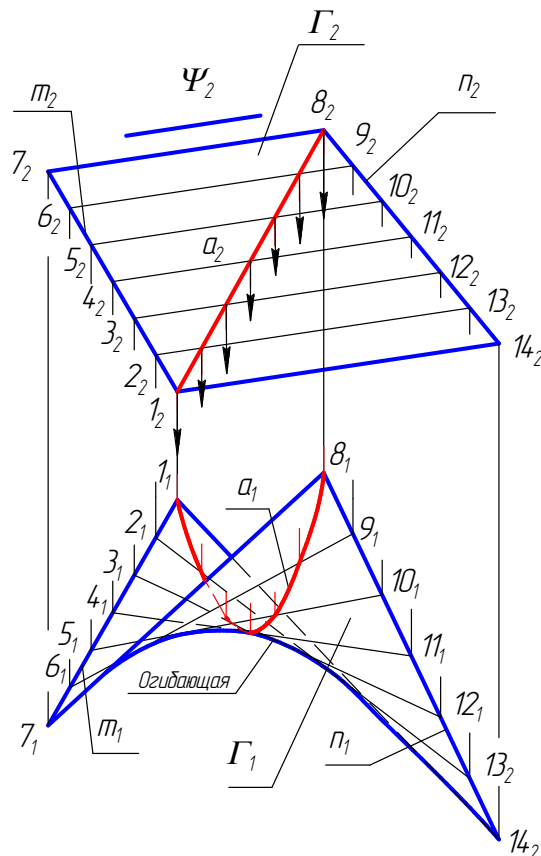


Рисунок 1.39 – Построение образующих и линии  $q$

## 1.9 Поверхности вращения

Поверхности вращения широко распространены в технике – это связано с простотой их обработки.

**Поверхность вращения** образует, какая-либо линия образующая ( $l$ ), при ее вращении вокруг неподвижной оси ( $i$ ).

Образующая ( $l$ ) может быть как прямая, так и кривая линия – плоская или пространственная.

### 1.9.1 Свойства поверхности вращения

Каждая точка образующей ( $l$ ) при вращении вокруг оси опишет окружность с центром на оси, плоскость которой перпендикулярна оси. Эти окружности называются **параллелями**. Все параллели параллельны между собой.

Самая большая параллель называется **экваториальной** (экватор) (рис. 1.40) – точка ( $B$ ) максимально удалена от оси; самая малая параллель называется **горловой** (горло), у некоторых поверхностей вращения отмечают верхнюю ( $C$ ) и нижнюю ( $D$ ) параллели (часто они являются линиями обреза поверхности).

Линии, которые получаются в сечении поверхности вращения плоскостями, проходящими через ось, называются **меридианами**. Все меридианы равны между собой. Каждый меридиан пересекается этой плоскостью на два полумеридиана (правый и левый).

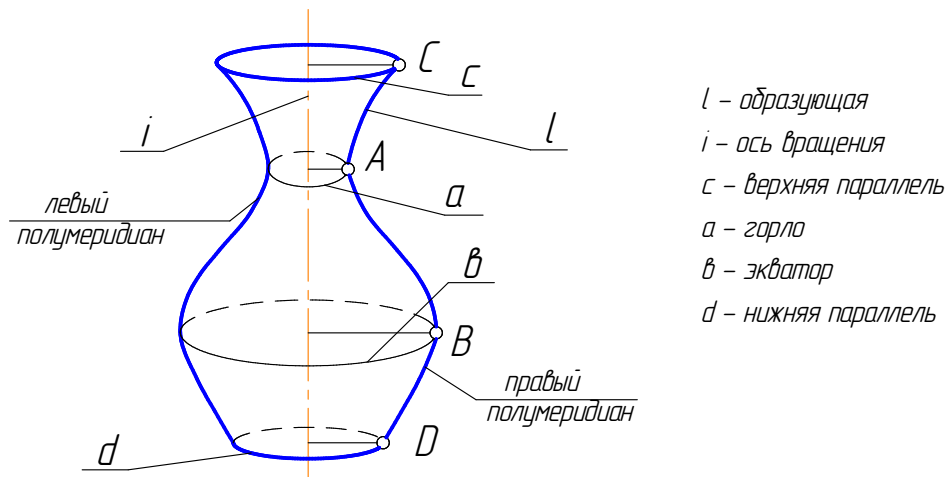


Рисунок 1.40 – Пример поверхности вращения.  
Элементы поверхности вращения

При изображении поверхности вращения на комплексном чертеже обычно поверхность располагают так, чтобы ее ось была перпендикулярна к плоскости проекций (например,  $i \perp \Pi_1$ ). Тогда все параллели проецируются на соответствующую плоскость ( $\Pi_1$ ) без искажения, причем экватор и горло на такой поверхности, как на рисунке 1.40, определяют горизонтальную проекцию поверхности.

Меридиан, расположенный во фронтальной плоскости, проецируется без искажения на плоскость  $\Pi_2$ . Этот меридиан называется **фронтальным** или **главным**, он определяет очерк проекции поверхности на фронтальную плоскость проекций и границу видимости относительно  $\Pi_2$ .

## 1.9.2 Комплексный чертеж поверхности вращения общего вида

**Задача:** построить поверхность вращения общего вида,  $\Phi(l, i) \text{ и } \Phi(i, k)$ ,  $i \perp \Pi_1$  (рис. 1.41).

1. Задать проекции элементов определителя, графическая часть определителя может быть задана образующей ( $l$ ) (рис. 1.41) или любой кривой ( $k$ ), лежащей на поверхности и пересекающей все ее параллели.

### Алгоритм построения

Если поверхность вращения  $\Phi$  задана  $\Phi(i, k)$ ,  $i \perp \Pi_1$ , то:

1. Дистраивается фронтальная проекция левого полумеридиана, проводятся проекции параллелей в виде отрезков прямых (тонкими линиями), перпендикулярных оси ( $i$ ): горло, экватор, нижняя и верхняя; дополнительные параллели для точного построения кривой (рис. 1.43).

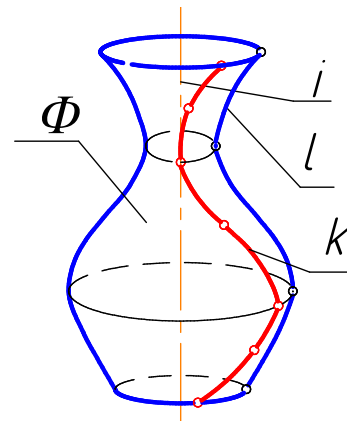


Рисунок 1.41 – Проекции элементов определителя

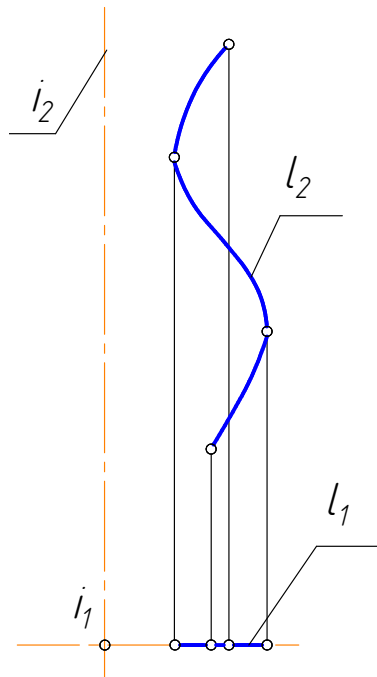


Рисунок 1.42 – Проекция определителя. Определитель задан осью –  $i$  и образующей –  $l$ , которая совпадает с плоскостью фронтального меридиана

2. После симметрично достроенного левого полумеридиана основной сплошной линией обводится очерк на  $\Pi_2$  – фронтальный (главный) меридиан.

3. Горизонтальная проекция поверхности вращения есть концентрично расположенные окружности-параллели, которые проецируются без искажения на  $\Pi_1$  (т.к.  $i \perp \Pi_1$ ) поэтому  $i_1$  – точка – центр окружностей. Экватор, верхняя параллель, горло на  $\Pi_1$  видимы, нижняя – невидима, т.к. расположена ниже экватора, а диаметр ее больше горла (рис. 1.43).

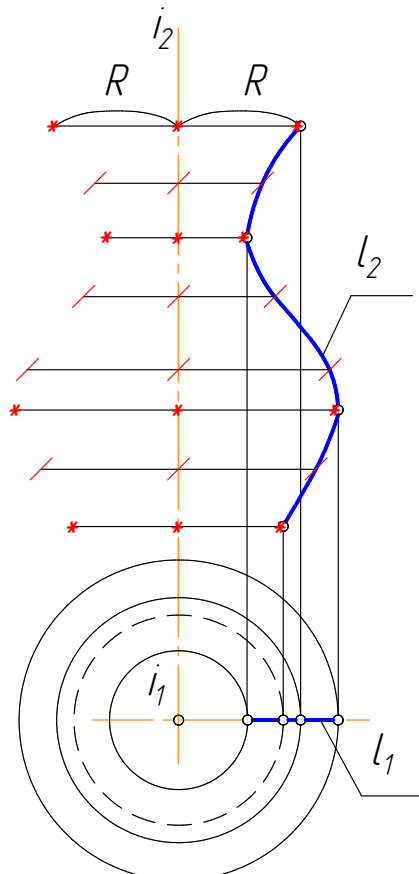


Рисунок 1.43 – Образование поверхности вращения

4. Видимость точек, принадлежащих поверхности, относительно  $\Pi_1$  определяется особыми параллелями (заштрихованные зоны на фронтальной проекции поверхности): относительно  $\Pi_2$  – главным меридианом (заштрихованная зона на горизонтальной проекции), (рис. 1.44)

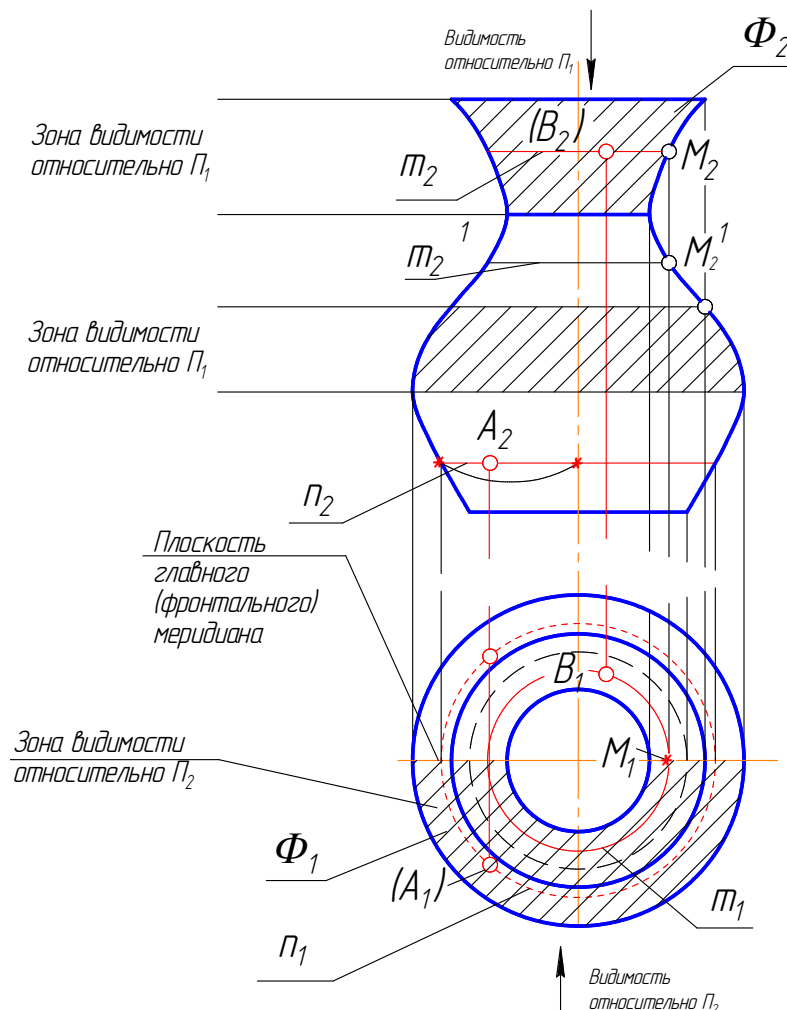


Рисунок 1.44 – Определение видимости точек, принадлежащих поверхности

5. Пусть  $A(A_2)$  и  $B(B_2) \in \Phi$ ,  $A_1$  и  $B_2 = ?$  Чтобы построить вторую проекцию точки, лежащую на поверхности, через заданную проекцию точки проводят параллель:

а) Через точку  $A_2$  проводят окружность – параллель ( $n_2$ ). Замеряют радиус этой параллели от оси до очерка и строят ее горизонтальную проекцию ( $n_1$ ). Из точки  $A_2$  проводят линию связи на  $n_1$ , которая пересекает  $n_1$  в двух точках, выбирают нижнюю, т.к.  $A_2$  видима, т.е. точка  $A_2$  находится перед главным меридианом. Определяют видимость точки  $A_1$  – она невидима, т.к. расположена ниже экватора (в незаштрихованной зоне);

б) Через точку  $B_1$  проводят параллель  $m_1$ , отмечают точку пересечения с главным меридианом  $M_1$ , по принадлежности ему отмечают  $M_2$ ,  $M_2^1$ , выбирают  $M_2$ , т.к.  $B_1$  на  $\Pi_1$  видима, т.е. ее параллель на  $\Pi_2$  должна находиться в зоне видимости относительно  $\Pi_1$ . Через  $M_2$  проводят фронтальную проекцию этой параллели  $m_2$ , из точки  $B_1$  проводят линию связи до пересечения с  $m_2$ .

Точка  $B_2$  – невидима, т.к. на  $B_1$  находится в незаштрихованной зоне, т.е. за главным меридианом.

### 1.9.3 Поверхности вращения второго порядка

#### 1.9.3.1 Цилиндр вращения

Цилиндр вращения образуется вращением образующей –  $l$  (прямой линией) вокруг параллельной ей оси.

$\Gamma(i, l), a(a_2) \subset \Gamma; a_1, a_3 = ?$

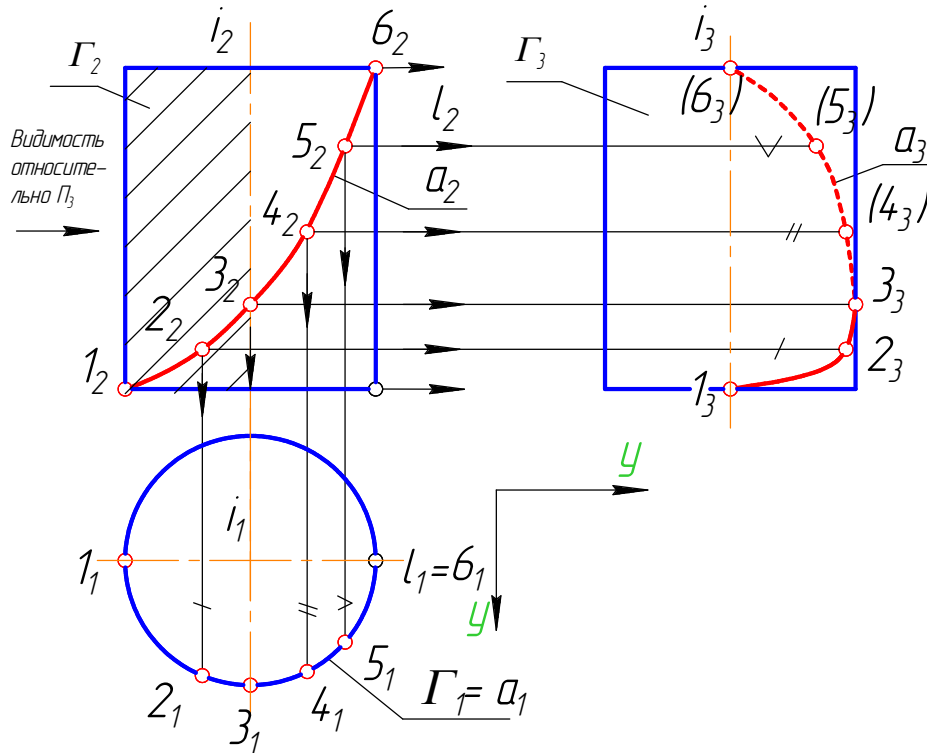


Рисунок 1.45 – Цилиндр вращения. Построение линии  $a$ , принадлежащей поверхности цилиндра

#### Алгоритм построения

- 1)  $i \perp \Pi_1, l \parallel i, l$  – горизонтально проецирующая прямая, значит  $\Gamma \perp \Pi_1$  – цилиндр занимает проецирующее положение относительно  $\Pi_1$ ;
- 2)  $\Gamma_1$  – главная проекция, которая обладает собирательными свойствами, поэтому  $a_1 = \Gamma_1$ ;
- 3)  $a_3$  строится по свойству принадлежности линии данной поверхности ( $a \subset \Gamma$ ) (см. рис. 1.45);
- 4) Точка 3 расположена на профильном меридиане, поэтому точка  $3_3$  является границей видимости на  $\Pi_3$ .

#### 1.9.3.2 Конус вращения

Конус вращения образуется вращением образующей –  $l$  (прямой линией) вокруг оси, которую она пересекает  $\Phi(i, l), a(a_2) \subset \Phi; a_1, a_3 = ?$   $i \perp \Pi_1, l \cap i; l$  – занимает положение прямой уровня (фронталь)  $l$  – прямая линия, поэтому цилиндр и конус относят так же и к линейчатым поверхностям.

Например, конус можно задать другим способом, как линейчатую поверхность  $\Phi(m, S)$ ,  $S$  – фиксированная точка,  $m$  (окружность, основание конуса) – неподвижная направляющая. Или как циклическую поверхность  $\Phi(m, l)$ , у которой  $l$  – образующая есть монотонно меняющаяся окружность, движущаяся по неподвижной направляющей (прямой линии) –  $m$ .

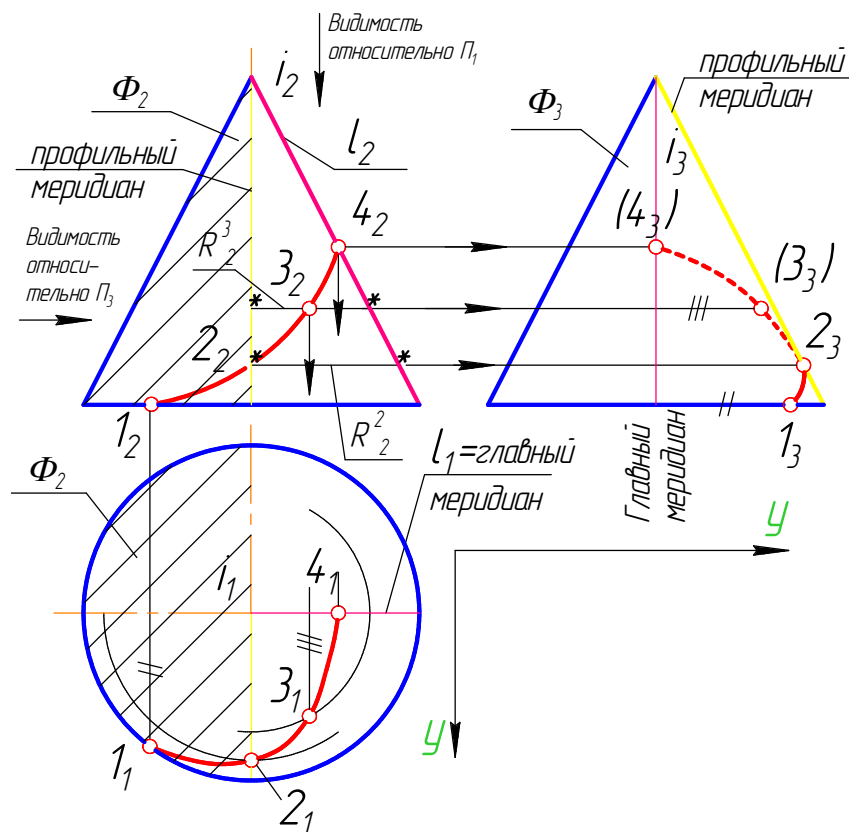


Рисунок 1.46 – Конус вращения. Построение линии  $a$ , принадлежащей поверхности конуса

#### Алгоритм построения $a_1, a_3$

1. Сначала отмечают на  $a_2$  особые точки (рис. 1.46). Точка  $1_2 \Rightarrow 1_1, 1_3$  - по принадлежности окружности основания. Точка  $4_2 \Rightarrow 4_1, 4_3$  - по принадлежности главному меридиану.
2. Промежуточные:  $3_2 \Rightarrow 3_1, 3_3$  по принадлежности параллели радиусом  $-R_2^3$
3. Точка  $2_2 \Rightarrow 2_1$  по принадлежности параллели  $-R_2^2$ .  $2_2 - 2_3$  по принадлежности профильному меридиану.

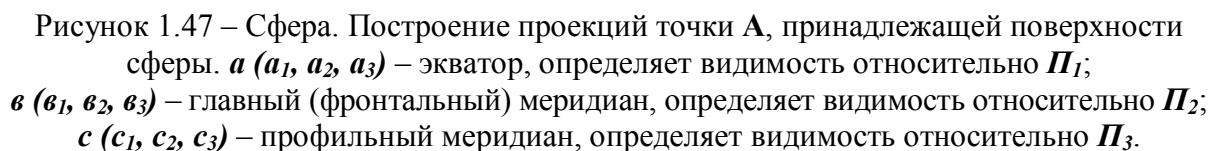
Видимость кривой –  $a$ :

- 1) на  $\Pi_1$  кривая  $a_1$  видима, т.к. на  $\Pi_1$  видима вся поверхность;
- 2) на  $\Pi_3$  границей видимости служит профильный меридиан (точка  $2_3$ ).

#### 1.9.3.3 Сфера

Сфера образуется вращением окружности ( $l$ ) вокруг оси (ее диаметра) ( $i$ )  $\Gamma(i, l)$ , – сфера,  $i \perp \Pi_1 A (A_2) \in \Gamma; A_1, A_3 = ?$





1. а) Для построения  $A_I$  через точку  $A_2$  (задана видимой) проводят параллель, измеряют радиус –  $R_2$  (от оси до очерка), строят горизонтальную проекцию этой параллели, проводят линию связи из точки  $A_2 \Rightarrow A_I$ .

2. а) Для построения  $A_3$  из точки  $A_2$  проводят линию связи на  $\Pi_3$ , на  $\Pi_1$  измеряют расстояние от фронтального меридиана ( $\epsilon_1$ ) –  $\Delta y$  (параллельно оси  $Y$ ), переносят на  $\Pi_3$ , откладывая от проекции фронтального меридиана ( $\epsilon_3$ ) по линии связи (параллельно оси  $Y \Rightarrow A_3$ ).

б) Определяют видимость  $A_3$  – видима, т.к. точка  $A(A_1)$  на  $\Pi_I$  расположена перед профильным меридианом (на  $\Pi_I$  в заштрихованной зоне) (рис. 1.47).

32

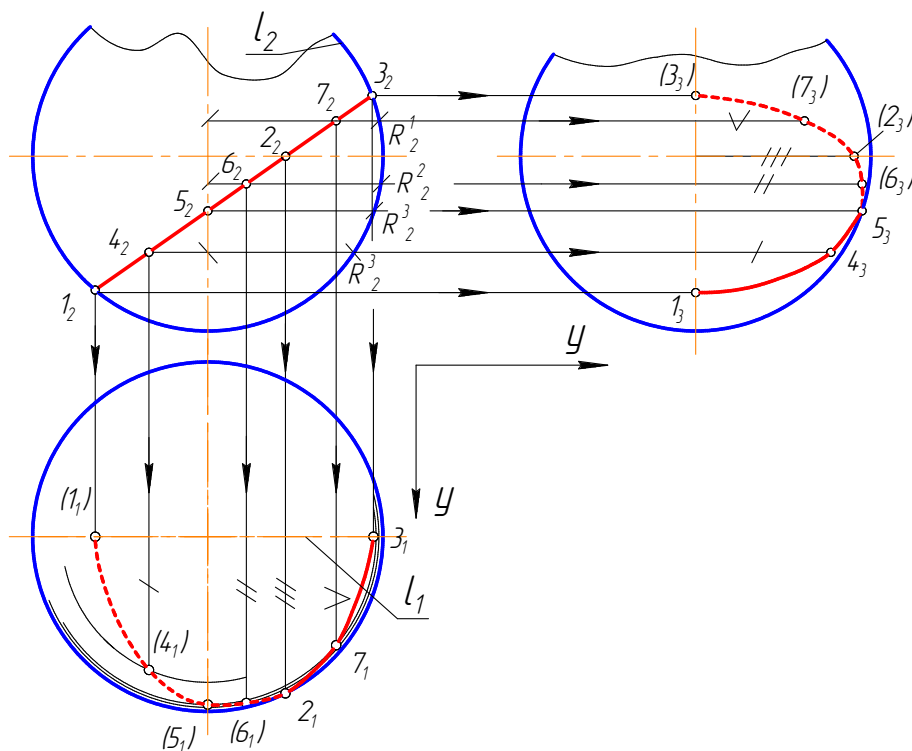


Рисунок 1.48 – Сфера. Построение проекций линии (1-3), принадлежащей поверхности сферы

1. Сначала отмечают особые точки (рис. 1.48):

Точка  $2_2 \Rightarrow 2_1, 2_3$  – по принадлежности экватору;

Точки  $1_2 \Rightarrow 1_1, 1_3$  и  $3_2 \Rightarrow 3_1, 3_3$  – по принадлежности главному меридиану;

Точка  $5_2 \Rightarrow 5_1, 5_3$  – по принадлежности профильному меридиану.

2. Промежуточные: 4, 6, 7 находят с помощью параллелей, радиусы которых замеряют от оси до очерка на  $\Pi_2$ . Профильные проекции точек находят см. (рис. 1.47)  $\Rightarrow A_3$ .

**Особые параллели и точки на них являются границами видимости кривой на соответствующих проекциях сферы.**

**Поверхности вращения второго порядка** – это поверхности, образованные вращением **кривой второго порядка** вокруг оси, лежащей в плоскости симметрии кривой.

### 1.9.3.4 Эллипсоид вращения

Образуется вращением эллипса вокруг оси (рис. 1.49).

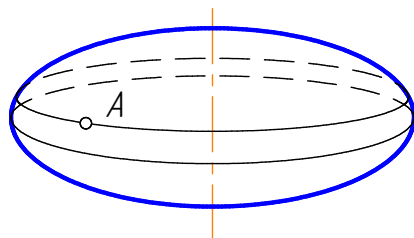


Рисунок 1.49 – Эллипсоид вращения

**Эллипсоид сжатый**

Эллипс вращается вокруг малой оси (рис. 1.50)

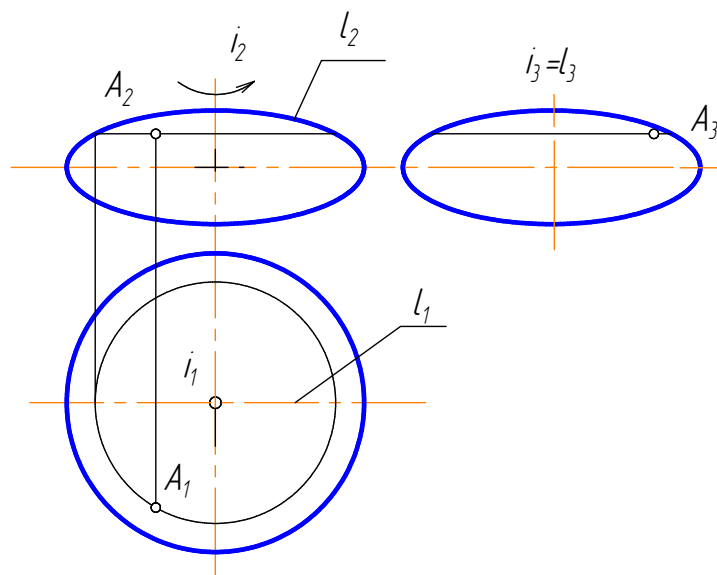


Рисунок 1.50 – Эллипсоид сжатый

### Эллипсоид вытянутый

Эллипс вращается вокруг большой оси (рис. 1.51)

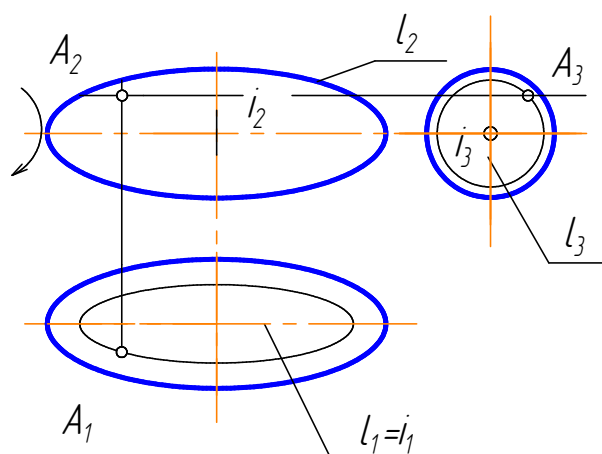


Рисунок 1.51 – Эллипсоид вытянутый

### 1.9.3.5 Параболоид вращения

Образуется вращением параболы вокруг её оси (рис. 1.52).

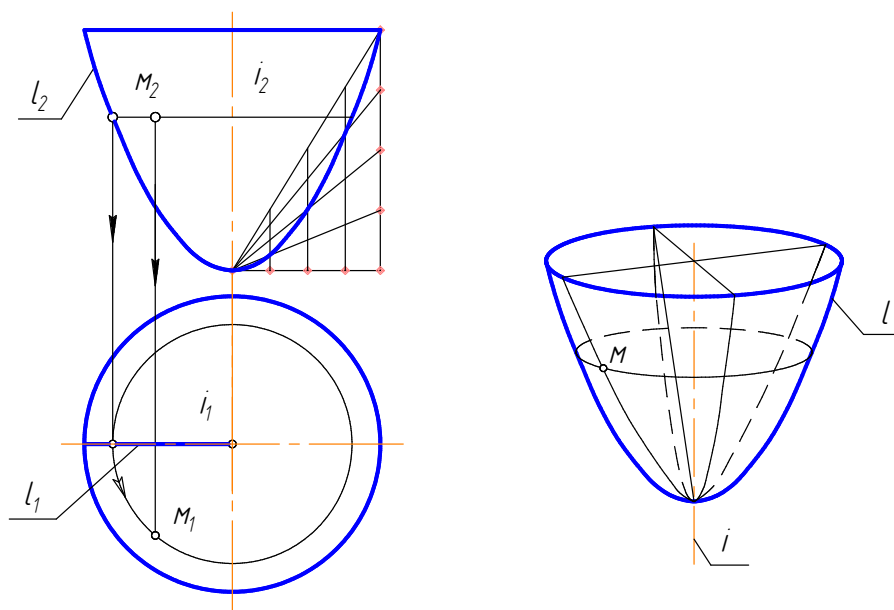


Рисунок 1.52 – Параболоид вращения

Параболоид применяется в прожекторах и фарах автомобилей, где используются фокальные свойства параболы; если в фокусе параболы поместить источник света, то световые лучи, отражаясь от параболы, будут распространяться параллельно друг другу (рис. 1.52-1). На этом же свойстве основано и действие звукоуловителей и радиотелескопов.

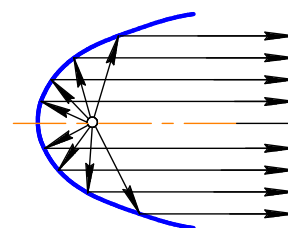


Рисунок 1.52-1 – Фокальные свойства параболы

### 1.9.3.6 Гиперболоид вращения

Образуется вращением гиперболы вокруг её оси.

Различают однополостный и двуполостный гиперболоиды вращения.

Однополостный (рис. 1.53) образуется при вращении гиперболы вокруг мнимой оси (рис. 1.54). Поверхность однополостного гиперболоида может быть образована и вращением прямой линии вокруг скрещивающейся с ней оси (рис. 1.55).

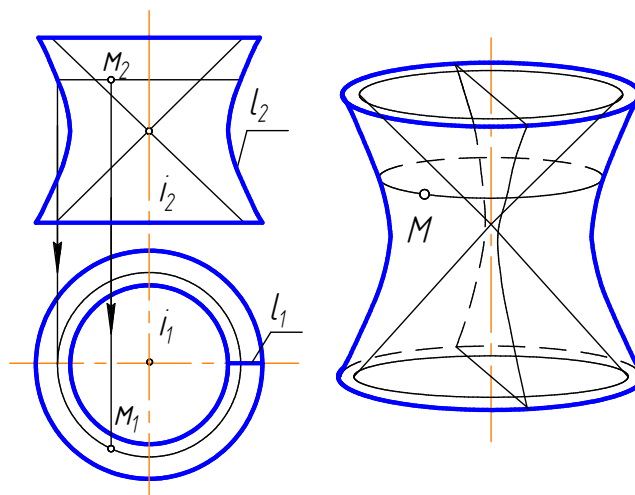


Рисунок 1.53 – Однополостный гиперboloид вращения

Определитель однополостного гиперboloида (образующая – прямая линия). Образующая и ось скрещивающиеся прямые. Эту поверхность относят и к линейчатым поверхностям  $\Sigma(l, i \perp \Pi_l, l \circ i)$  (рис. 1.54).

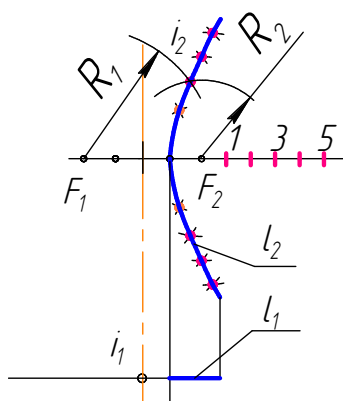


Рисунок 1.54 – Определитель однополостного гиперboloида  $\Sigma(l, i \perp \Pi_l)$

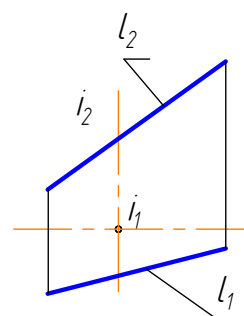


Рисунок 1.55 – Определитель однополостного гиперboloида (образующая – прямая линия)

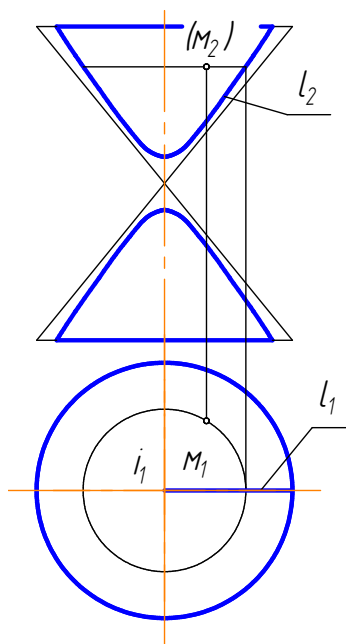


Рисунок 1.56 – Двуполостный гиперboloид вращения образуется при вращении гипербола вокруг ее действительной оси

Один из способов (рис. 1.57) построения однополостного гиперboloида: т.к. горизонтальные проекции всех образующих должны касаться проекции горловой окружности, то каждое последующее положение прямолинейной образующей можно создавать проведением касательных к проекции окружности горла.

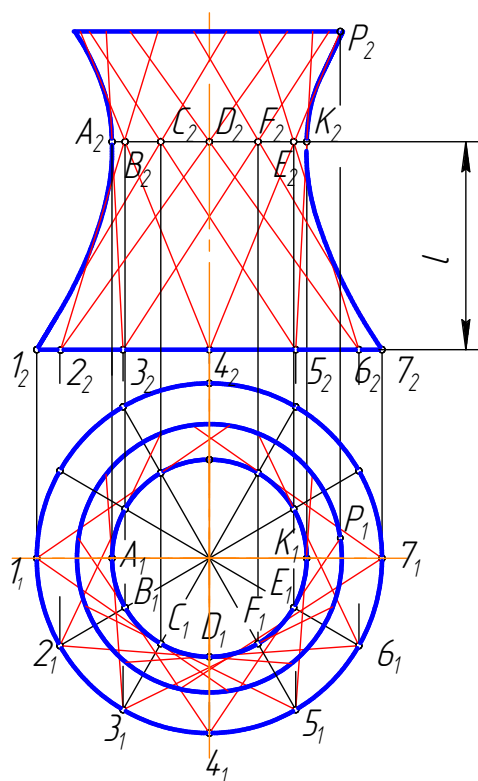


Рисунок 1.57 – Один из способов построения однополостного гиперboloида

Выдающийся русский инженер В. Г. Шухов (1921г.) предложил использовать однополостный гиперboloид для строительства прочных и технологичных конструкций (радиомачт, водонапорных башен, маяков).

Алгоритм построения, если поверхность задана параллелями и расстоянием ( $l$ ) от экватора до горла (рис. 1.57):

1. Разбить горловую ( $A, B, C...$ ) и нижнюю ( $1, 2, 3, ...$ ) параллели на 12 равных частей;
2. Из точки  $4_1$  провести образующие так, чтобы они были касательными к горловой параллели (т.е. через  $B_1$  и  $E_1$ ), на горизонтальной проекции верхней параллели получим точку  $P_1$ , которая определит положение верхней параллели на фронтальной проекции. Эти образующие и на  $l_2$  пройдут через те же точки ( $4_2, B_2, E_2$ ).
3. Для остальных точек построение повторить.

Только три поверхности вращения второго порядка имеют в качестве образующей прямую линию. В зависимости от расположения этой прямой относительно оси, можно получить три вида линейчатых поверхностей вращения второго порядка:

1. **Цилиндр**, если образующая параллельна оси вращения,  $x^2 + y^2 = R^2$ ;
2. **Конус**, если образующая пересекает ось вращения,  $k^2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ ;
3. **Однополостный гиперболоид вращения**, если ось и образующая скрещиваются,  $(x^2 + y^2) / a^2 - z^2 / d^2 = 0$ .

### Алгоритм построения главного меридиана однополостного гиперболоида, $\Psi(i, l)$ (образующая - прямая линия)

При построении однополостного гиперболоида, как линейчатой поверхности, главный (фронтальный меридиан) строится по точкам, чем больше точек, тем точнее построения. Рассмотрим алгоритм построения одной точки ( $E$ ), взятой на образующей.

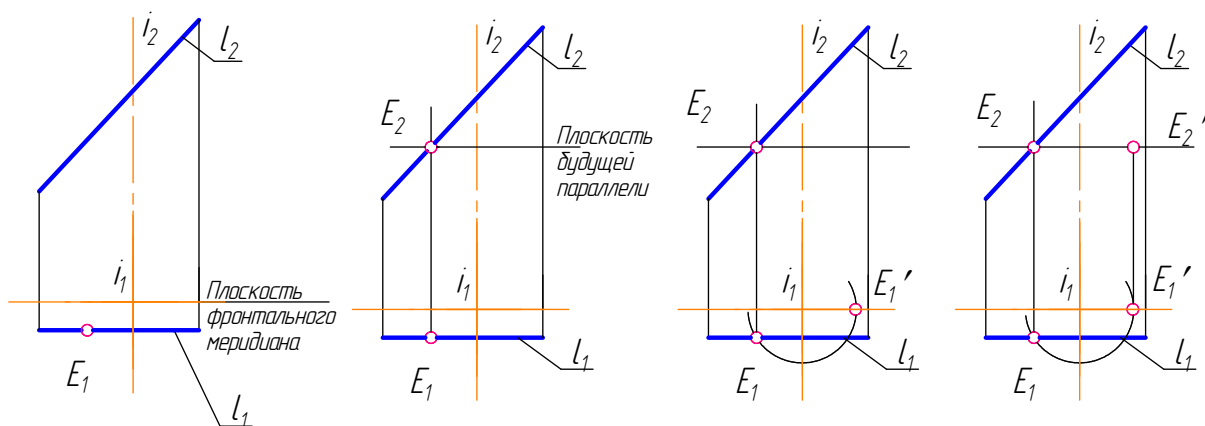


Рисунок 1.58 – Графический алгоритм построения одной точки ( $E$ )

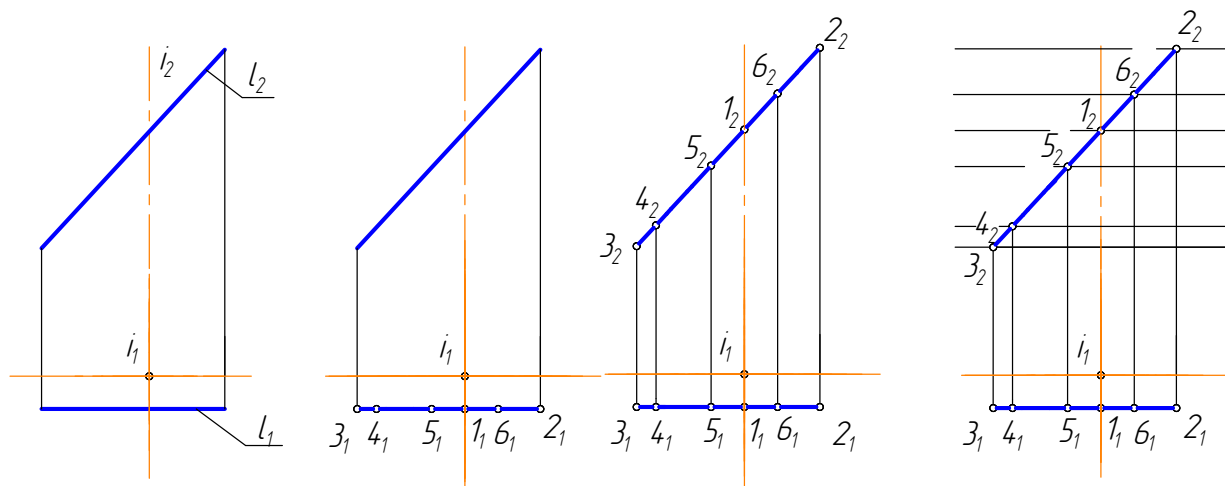


Рисунок 1.59 – Графический алгоритм построения поверхности

1) задать проекции определителя  $\Psi(i, l), i \perp \Pi_1$  (рис. 1.59);

2) распределить точки на  $l_1$ , которые определяют положение будущих параллелей на  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ;

точка  $1(1_1)$  – определит положение горловой параллели (т.к. это ближайшая точка к оси вращения);

точка  $2(2_1)$  – определит положение верхней параллели;

точка  $3(3_1)$  – определит положение нижней параллели и одновременно будет экватором;

точки  $4, 5, 6(4_1, 5_1, 6_1)$  – промежуточные точки;

3) точки  $(1_1 \dots 6_1 \rightarrow 1_2 \dots 6_2)$ ;

4) далее все точки нужно ввести в плоскость фронтального меридиана (рис. 1.60), используя основное свойство поверхности вращения: каждая точка вращается вокруг оси по окружности (параллели), плоскость которой перпендикулярна оси, точки  $1_1 \dots 6_1 \rightarrow 1_1' \dots 6_1'$ , точки  $1_1' \dots 6_1' \rightarrow 1_2' \dots 6_2'$ ;

5) полученные точки соединить плавной кривой  $\rightarrow$  правый полумеридиан (рис. 1.61);

6) все полумеридианы поверхностей вращения равны, поэтому симметрично правому достраиваем левый (рис. 1.62);

7) определить видимость поверхности (см. рис. 1.62).

9)  $A(A_2)$  и  $B(B_1) \in \Psi, A_1, B_2 = ?$

Точки находят так же, как на любой поверхности вращения.

а) Через точку  $A_2$  проводят параллель до пересечения с главным (фронтальным) меридианом (точка  $M_2$ ),  $M_2 \rightarrow M_1$ . Через  $M_1$  проводят горизонтальную проекцию этой параллели или замеряют радиус этой параллели на  $\Pi_2$  и проводят на  $\Pi_1$ .

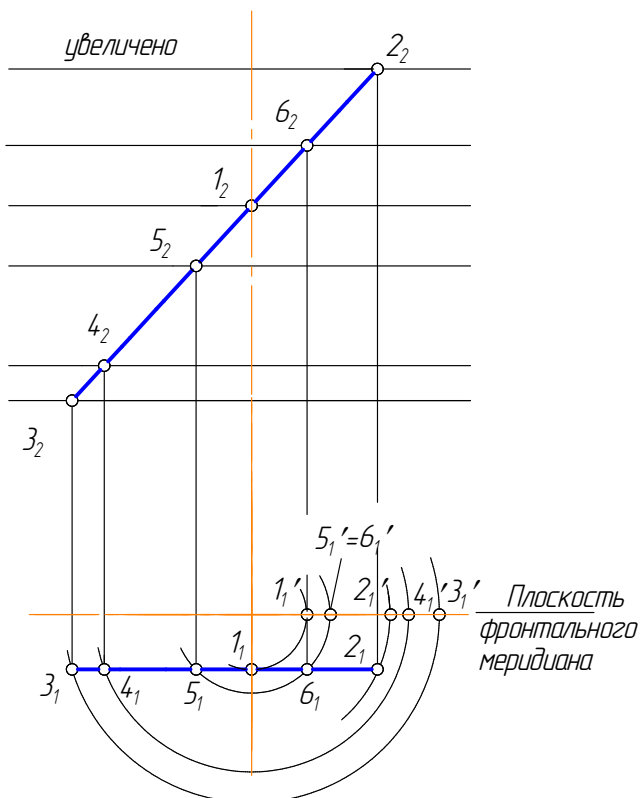


Рисунок 1.60 – Ввод точек в плоскость фронтального меридиана

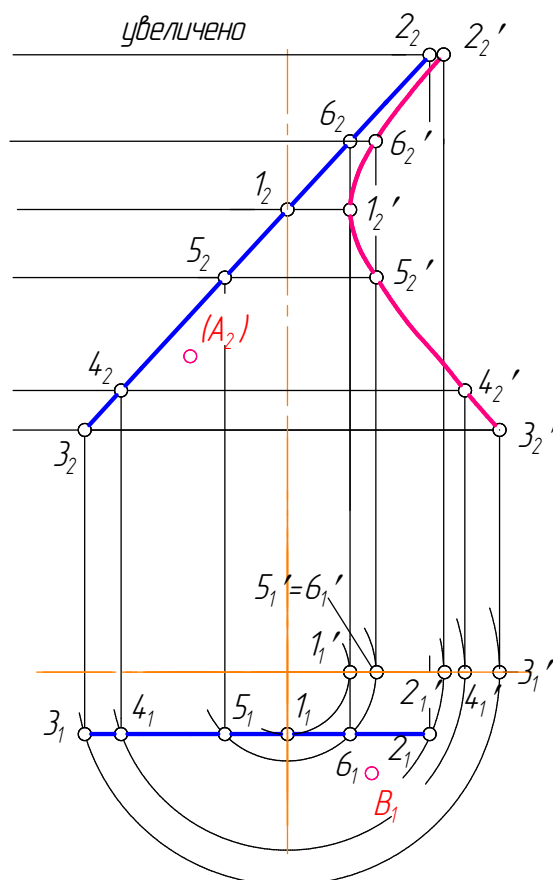


Рисунок 1.61 – Построение правого полумеридиана



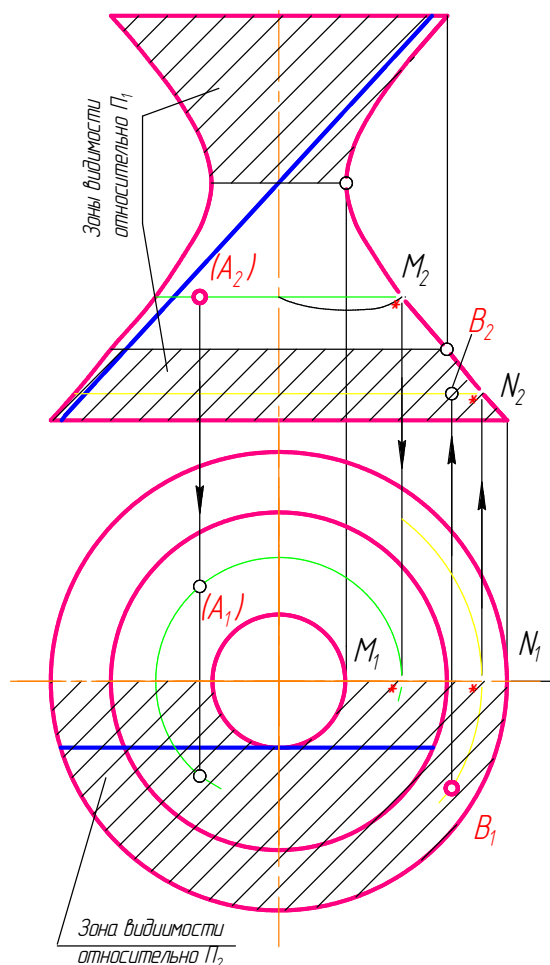


Рисунок 1.62 – Построение левого полумеридиана. Определение видимости.  
Построение точек, принадлежащих поверхности гиперboloида

Проводят линию связи из точки  $A_2$ , которая пересекает построенную параллель в двух точках, выбрать нужно верхнюю, т.к. точка  $A_2$  в скобках, значит она находится за фронтальным меридианом (сзади). Точку  $A_1$  нужно взять в скобки, т.к. она не расположена в зоне видимости (в не заштрихованной зоне).

б) Через точку  $B_1$  проводят параллель (вводят в плоскость фронтального меридиана  $\rightarrow N_1$ ),  $N_1 \rightarrow N_2$ . Через  $N_2$  проводят фронтальную проекцию этой параллели, из  $B_1$  проводят линию связи  $\rightarrow B_2$ . Точка  $B_2$  – видима, т.к.  $B_1$  находится перед фронтальным меридианом.

### 1.9.3.7 Тор – поверхность вращения 4 порядка

Как Вы думаете, что имеют общего бублик с маком и термоядерный реактор? Да, их объединяет конфигурация торовой поверхности. Форму тора имеют обода маховиков и шкивов, галтели - плавные переходы от одной поверхности изделия к другой, создаваемые с целью уменьшения напряжений в месте перехода.

**Поверхность тора образуется при вращении окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Определитель  $\Theta(l, i) \neq i$ .**

Произвольная прямая пересекает тор в общем случае в четырех точках, следовательно, это поверхность четвертого порядка (рис. 1.63,а, рис. 1.63,б).

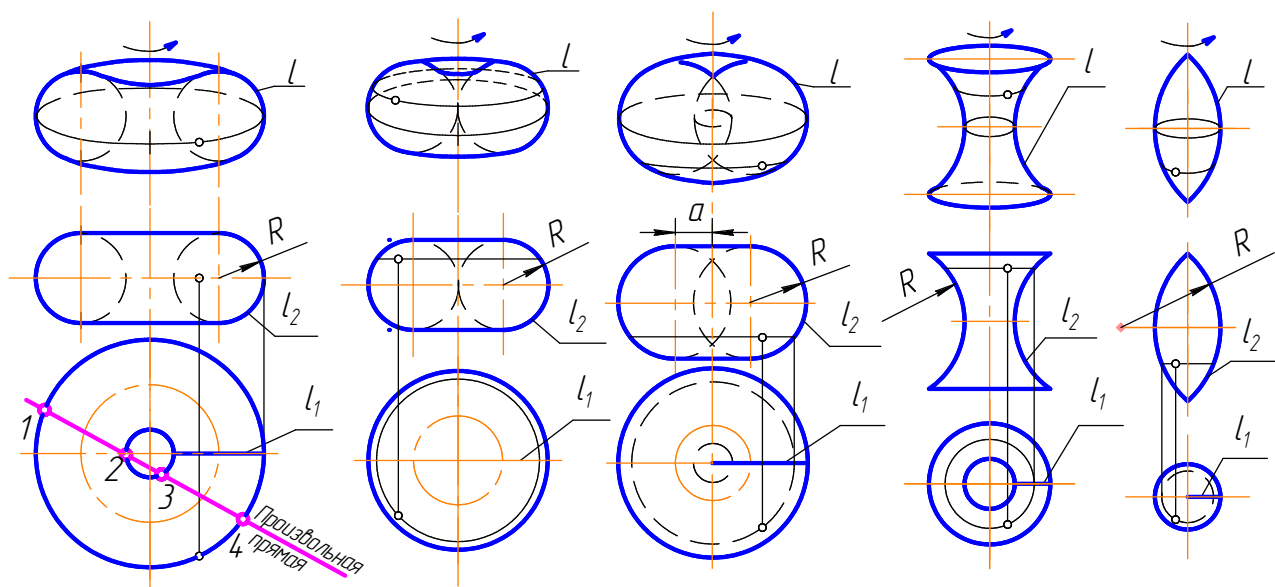


Рисунок 1.63,а – Образование тороидальной поверхности

### Открытый тор

$$R < a$$

Или тор – кольцо. Внутренняя его часть называется глоболоидом

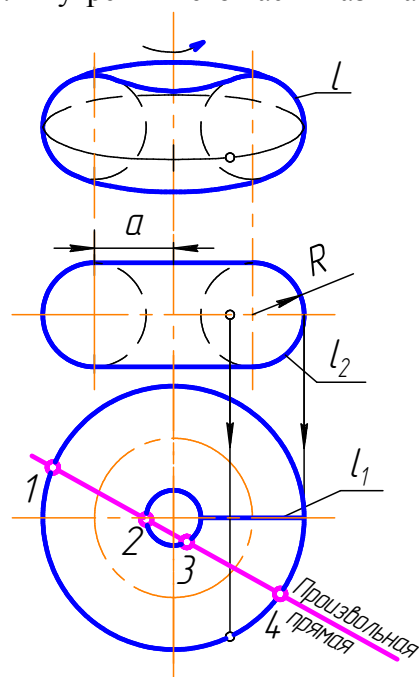


Рисунок 1.63,б – Открытый тор

**Закрытый тор  
(Самосоприкасающийся)**

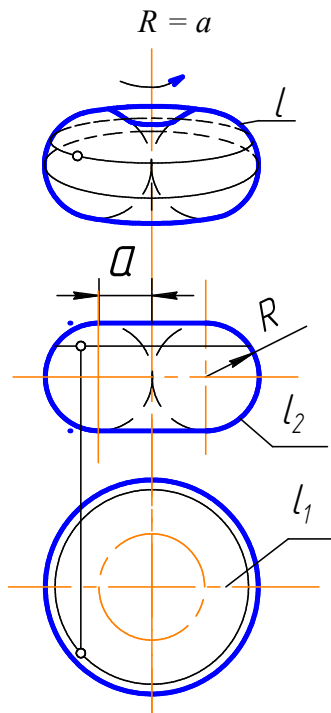


Рисунок 1.64 – Закрытый тор (самосоприкасающийся)

**Закрытый тор  
(тор - лимон)**

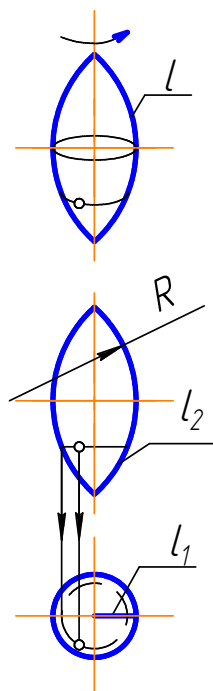


Рисунок 1.66 – Закрытый тор (лимон)

**Закрытый тор  
(самопересекающийся)**

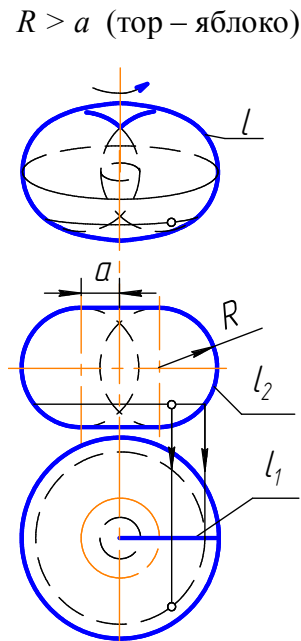


Рисунок 1.65 – Закрытый тор (самопересекающийся, тор – яблоко)

**Глоболоид**

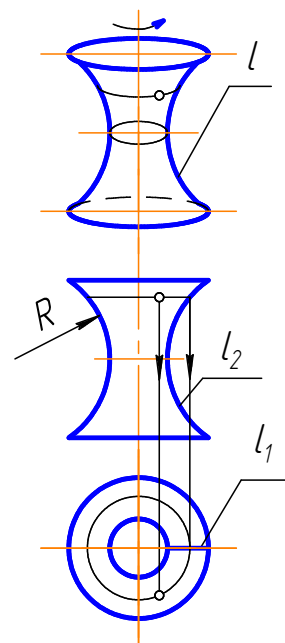


Рисунок 1.67 – Глоболоид (внутренняя часть тора)

Сконструировать поверхность: тор-кольцо  $\Theta(l, i), i \perp \Pi_2, n(n_2) \subset \Theta, n_1 = ?$

**Алгоритм:**

1. Задать проекции элементов определителя (рис. 1.68).

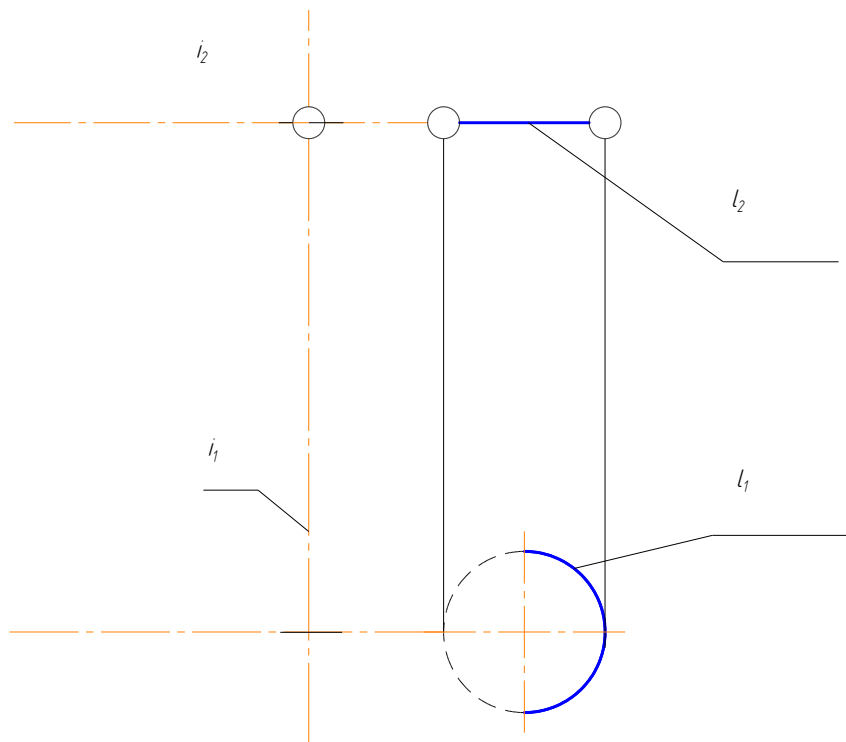


Рисунок 1.68 – Проекции элементов определителя тора

2. Построить горизонтальную проекцию правого полумеридиана.

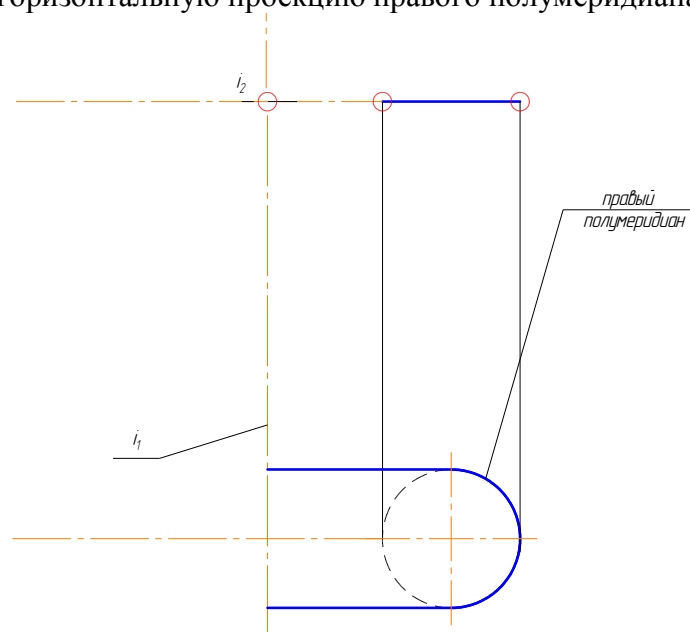


Рисунок 1.69 – Горизонтальная проекция правого полумеридиана

3. Достроить левый полумеридиан симметрично правому.

4. Фронтальная проекция – это концентрично расположенные особые параллели.

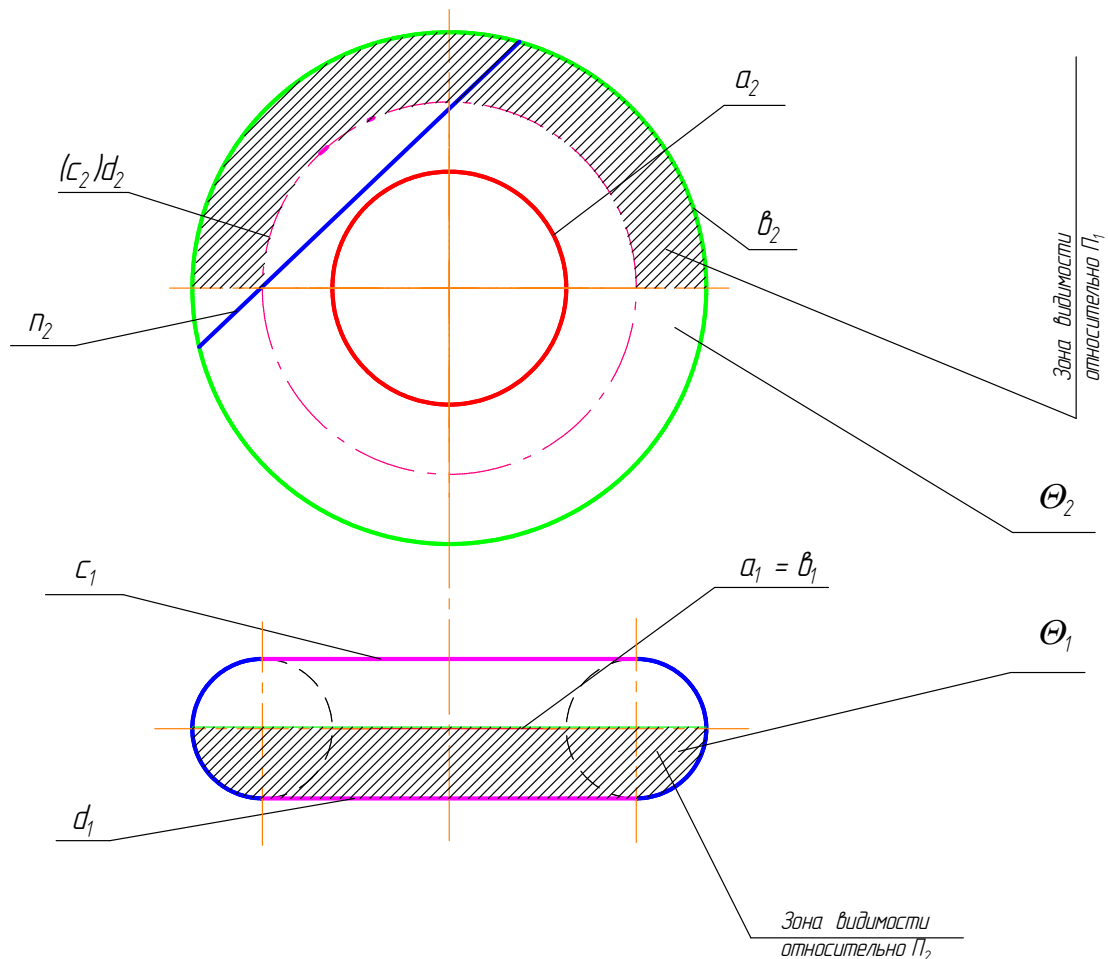


Рисунок 1.70 – Элементы тора ( $a$  – горло;  $b$  – экватор;  $c$  – дальняя параллель;  $d$  – ближняя параллель)

##### 5. Алгоритм построения $n_I$ (рис. 1.71; рис.1.72):

Кривую  $n_I$  строят по точкам, используя свойство принадлежности точки поверхности, проводя через точку простейшую линию. Для тора, как и для всех поверхностей вращения, простейшей является параллель (окружность).

а) Сначала выбирают особые точки (рис.1.71):  $1(I_2)$  и  $2(2_2) \in$  экватору,  $3(3_2) = 4(4_2)$  и  $7(7_2) = 8(8_2) \in$  ближней и дальней параллелям,  $5(5_2) = 6(6_2)$  главному меридиану (или образующей  $I_2$ ),  $9(9_2) = 10(10_2)$  определяют положение точек, максимально приближенных к оси (кратчайшее расстояние между ветвями кривой), т.е. эти точки будут расположены на самых малых параллелях.

Все особые точки, кроме  $9,10$ , находятся без дополнительных построений.

Для построения точек  $9,10$  проводят через  $9_2(10_2)$  параллели до пересечения с главным меридианом  $\rightarrow K_2(L_2)$ .

Находят положение этих точек  $K_I(L_I)$ , на  $\Pi_I$ , через них проводят горизонтальные проекции параллелей, на которые проводят линии связи из соответствующих точек  $9_2(10_2) \rightarrow 9_1,10_1$ .

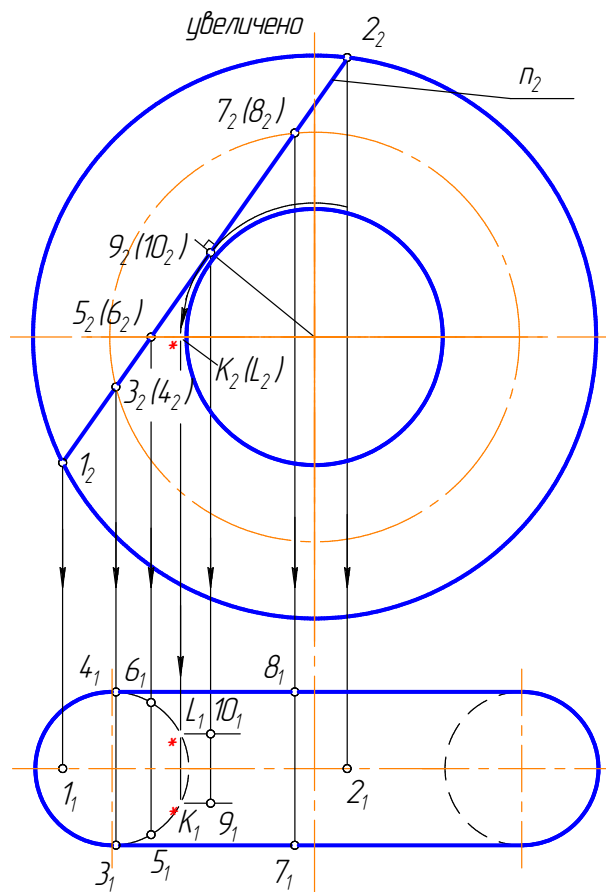


Рисунок 1.71 – Построение опорных точек линии  $n$ , лежащей на поверхности тора

б) Промежуточные точки (рис. 1.72.):  $11(12)$ ,  $13(14)$ ,  $15(16)$  строят по аналогии с точками  $9(10)$ , с помощью параллелей  $A_2(B_2)$ ,  $C_2(D_2)$ ,  $M_2(N_2)$ .

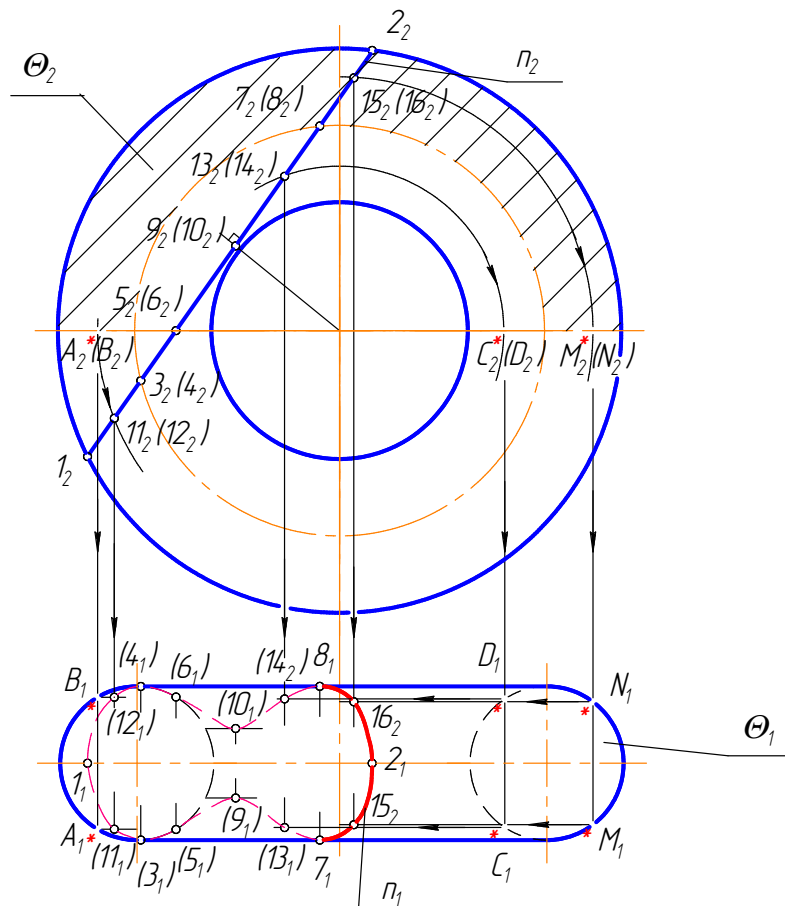


Рисунок 1.72 – Построение промежуточных точек линии  $n$ , лежащей на поверхности тора

в) Плавной кривой соединяют все точки.

г) Видимость кривой  $n_1$  определяется ближней и дальней параллелями (точками 7 и 8), т.е. кривая  $n$  на  $\Pi_1$  будет видима от точки  $7_1$  до точки  $8_1$  через  $2_1$ .

## 1.10 Винтовые поверхности

Как Вы думаете, какое свойство винтовых поверхностей обеспечивает им широкое применение в технике: винты, шнеки, сверла, пружины?

Оказывается, эти поверхности могут сдвигаться, т.е. совершая винтовое перемещение, поверхность скользит вдоль самой себя.

**Винтовой** называется поверхность, которая описывается какой-либо линией (образующей) при ее винтовом движении. Как уже отмечалось, что винтовое движение является сложным движением, при котором каждая точка образующей совершает одновременно два движения: вращательное и поступательное. При этом вращение происходит вокруг оси винта, а поступательное вдоль оси винта.

Если образующая - прямая линия, то поверхность называется **линейчатой винтовой поверхностью** или **геликоидом**. Геликоид является основой образования резьбы.

Геликоиды подразделяются на **прямые** и **наклонные** в зависимости от того, перпендикулярна образующая к оси геликоида или наклонена.

**Шагом винтовой поверхности** называется линейное перемещение образующей за один полный оборот.

### 1.10.1 Прямой геликоид

Прямой геликоид образуется движением прямолинейной образующей —  $l$  по двум направляющим, оставаясь в любой момент движения  $\perp$  оси,  $\Phi(i, m), A(A_2) \in \Phi, A_1 = ?$

$i$  – ось цилиндрической винтовой линии;

$m$  – цилиндрическая винтовая линия.

Закон каркаса:  $l \cap i, l \cap m, l \perp i$

Прямой геликоид может быть отнесен к числу **коноидов** и назван **винтовым коноидом** (плоскость параллелизма перпендикулярна оси,  $i$  и  $m$  – направляющие).

### 1.10.2 Наклонный геликоид

Наклонный геликоид отличается от прямого тем, что его прямолинейная образующая при винтовом перемещении пересекает ось геликоида **под постоянным углом**, отличным от прямого. Иначе говоря, образующая ( $l$  – прямая линия) наклонного геликоида при винтовом движении скользит по двум неподвижным направляющим (ось и цилиндрическая винтовая линия, как и у прямого), причем во всех своих положениях угол наклона образующей к оси не меняется. Поэтому можно сказать, что образующая в каждый момент движения будет параллельна соответствующим образующим некоторого конуса вращения, называемого направляющим конусом.

Построить наклонный геликоид  $\Phi(i, m)$ :

$i$  – ось цилиндрической винтовой линии;

$m$  – цилиндрическая винтовая линия.

Закон каркаса:  $l \cap i, l \cap m, l \text{ не } \perp i, i \perp \Pi_1$

#### Алгоритм построения

1. Задать проекции элементов определителя: построить цилиндрическую винтовую линию из 12 точек (рис. 1.74).

2. Задать проекции направляющего конуса (провести 12 образующих) (рис. 1.75), наклон образующих которого к оси определит угол наклона образующих геликоида. Углы  $\varphi$  у образующих конуса ( $I_2^I$ ) и геликоида ( $I_2$ ) не искажаются, т. к. эти образующие занимают положение фронтоли.

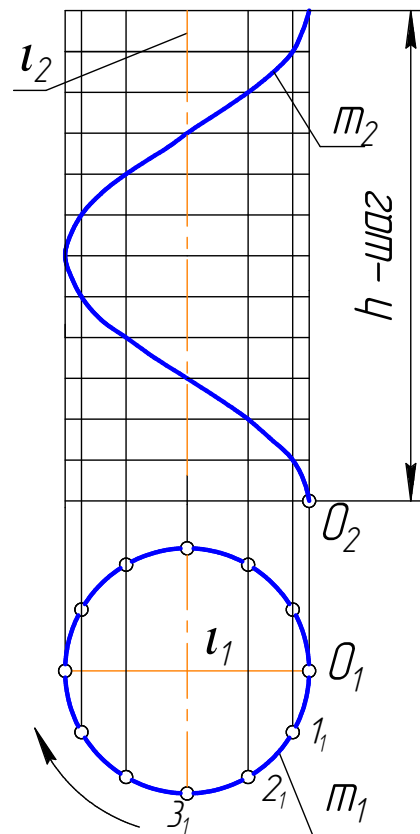


Рисунок 1.73 – Проекции элементов определителя поверхности прямого геликоида

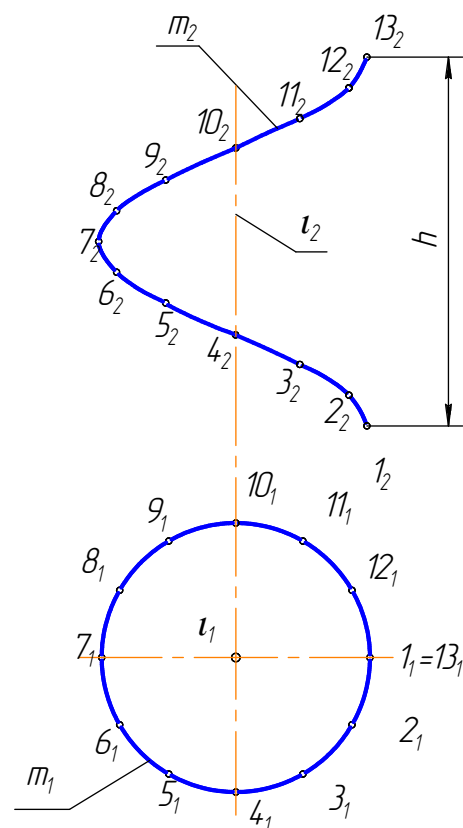


Рисунок 1.74 – Проекции элементов определителя наклонного геликоида



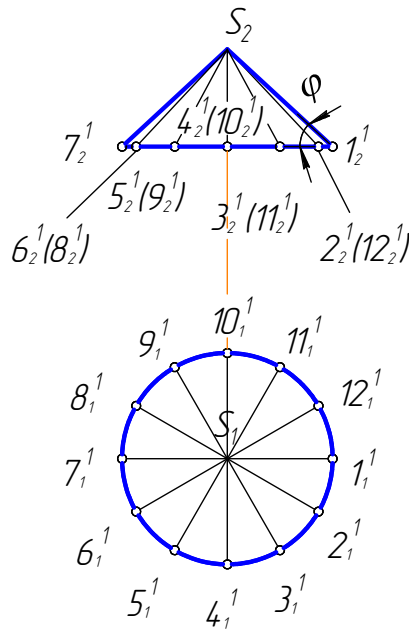


Рисунок 1.75 – Проекции направляющего конуса

3. Построение геликоида начинаем с горизонтальной проекции. Из точек  $1_I$  и  $2_I$  провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса  $1_I^I$  и  $2_I^I$  до пересечения с осью –  $i_I$  (рис. 1.76).

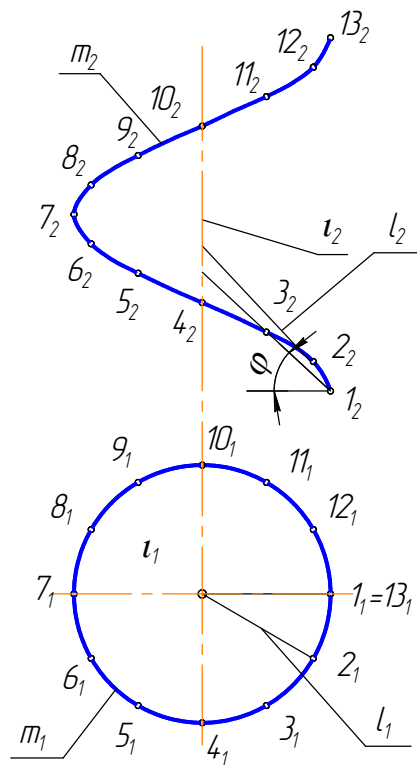


Рисунок 1.76 – Начало построения геликоида

4. На фронтальной проекции из точек  $1_2$  и  $2_2$  провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса  $1_2^I$  и  $2_2^I$  до пересечения с осью –  $i_2$ .

5. Остальные образующие геликоида строим таким же образом.

Направляющий конус может быть соосным с наклонным геликоидом (рис. 1.77).



6. Определить видимость поверхности, как всегда, с помощью конкурирующих точек, например, выбрать фронтально конкурирующие  $A_2 = B_2$ , т.е. образующая  $3_2$  закрывает образующую  $2_2$ , направляющая и образующие от точки  $8$  до точки  $10$  - невидимы.

7. Обвести проекции поверхности на  $\Pi_2$  с учетом видимости. Очертание геликоида на фронтальной проекции получается как огибающая семейство прямолинейных образующих.

8. В сечении геликоида плоскостью  $\Psi(\Psi_2)$ , перпендикулярной ее оси, получается **спираль Архимеда**.

Каркас образующих наклонного геликоида можно построить и без применения направляющего конуса.

Образующие  $1_2M_2$  и  $13_2N_2 \parallel \Pi_2$ , т.е. занимают положение фронталей, поэтому при заданном угле наклона образующей геликоида сразу определяют положение точек  $M_2$  и  $N_2$ .

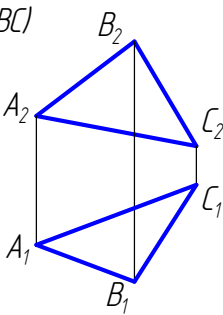
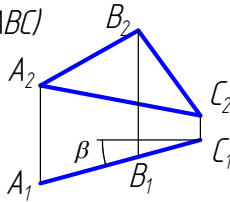
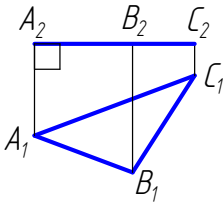
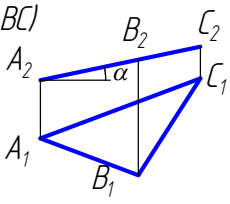
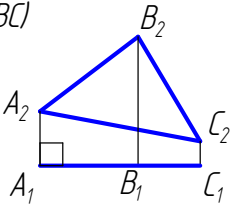
Расстояние (шаг) между этими точками делят на **12** равных частей и соединяют с соответствующими точками на цилиндрической винтовой направляющей.

## 1.11 Контрольные вопросы

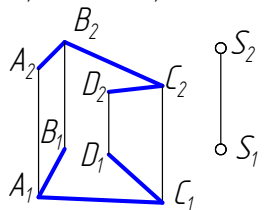
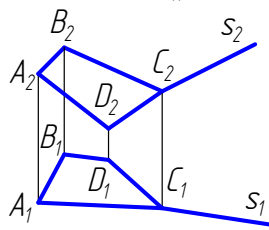
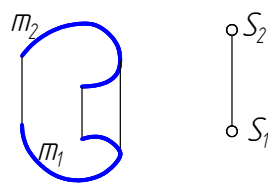
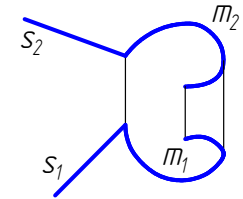
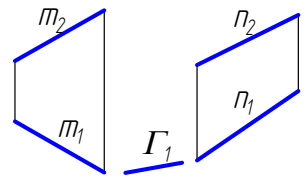
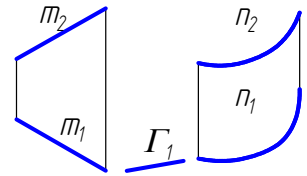
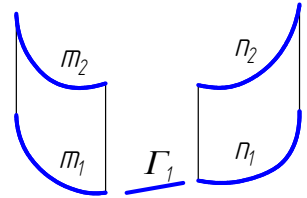
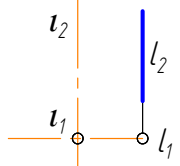
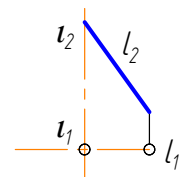
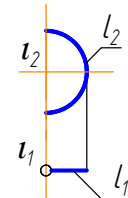
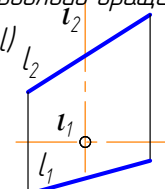
1. Что означает "кинематический принцип образования поверхности"?
2. Что называется определителем поверхности?
3. Какие поверхности называются линейчатыми?
4. Сформулируйте признак принадлежности точки поверхности.
5. Перечислите поверхности вращения второго порядка.
6. Назовите поверхности с плоскостью параллелизма.
7. Какие поверхности могут занимать проецирующее положение?

## 1.12 Справочный материал

### 1.12.1 Задание плоскости на комплексном чертеже

Плоскость общего положения	Плоскости проецирующие		Плоскости уровня	
$\Gamma(ABC)$ 	Горизонтально проецирующая	$\Delta(ABC)$ 	Горизонтальная плоскость уровня	$\Sigma(ABC)$ 
	Фронтально проецирующая	$\Phi(ABC)$ 	Фронтальная плоскость уровня	$\Psi(ABC)$ 

### 1.12.2 Задание поверхности на комплексном чертеже (геометрическая часть определителя некоторых поверхностей)

Линейчатые поверхности			
<p>Пирамидальная поверхность общего вида <math>\Gamma(S, ABCD): l \cap ABCD, l \supset S</math></p> 	<p>Призматическая поверхность <math>\Phi(s, ABCD): l \cap ABCD, l \parallel s</math></p> 	<p>Коническая поверхность общего вида <math>\Lambda(S, m): m \cap m, l \supset S</math></p> 	<p>Цилиндрическая поверхность общего вида <math>\Phi(s, m): l \cap m, l \parallel s</math></p> 
<p>Гиперболический параболоид (косая плоскость) <math>\Psi(n, m, \Gamma): l \cap n, l \cap m, l \parallel \Gamma</math></p> 	<p>Конусоид <math>\Psi(n, m, \Gamma): l \cap n, l \cap m, l \parallel \Gamma</math></p> 	<p>Цилиндроид <math>\Psi(n, m, \Gamma): l \cap n, l \cap m, l \parallel \Gamma</math></p> 	
Поверхности вращения			
<p>Цилиндр вращения <math>\Gamma(l, l)</math></p> 	<p>Конус вращения <math>\Psi(l, l)</math></p> 	<p>Сфера <math>\Theta(l, l)</math></p> 	<p>Однополостный гиперболоид вращения <math>\Delta(l, l)</math></p> 

## 2 ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

В данном смысловом модуле вы научитесь находить общий элемент пересекающихся геометрических фигур в пространстве, овладеете алгоритмом построения проекций элементов пересечения геометрических фигур, занимающих различное положение относительно плоскостей проекций.

В технике детали большинства изделий имеют формы, представляющие собой поверхности, пересечённые либо плоскостями, либо другими поверхностями. Для того, чтобы проектировать и изготавливать такие изделия, необходимо научиться строить линии пересечения различных геометрических фигур. В этом вам поможет данный раздел начертательной геометрии.

**Позиционными задачами называют такие, в которых определяется взаимное расположение геометрических фигур в пространстве.**

Как Вам уже известно, существует три типа позиционных задач:

1. Взаимный порядок геометрических фигур.
2. Взаимная принадлежность геометрических фигур.
3. Взаимное пересечение геометрических фигур.

Первые две задачи были рассмотрены в предыдущих разделах курса. Взаимный порядок геометрических фигур — это расположение геометрических фигур относительно плоскостей проекций и наблюдателя: "ближе - дальше", "выше - ниже", "левее - правее" и т.д.

Взаимная принадлежность геометрических фигур - это "точка принадлежит ...", "прямая принадлежит ..." и т.д.

Рассмотрим подробнее всё многообразие решений третьего типа задач.

Две геометрические фигуры, пересекаясь, дают общий элемент:

1. Прямая с прямой - точку ( $a \cap b \Rightarrow K$ ).
2. Прямая с плоскостью - точку ( $a \cap \Sigma \Rightarrow K$ ).
3. Прямая с поверхностью - одну или несколько точек ( $a \cap \Delta \Rightarrow K, M \dots$ ).
4. Плоскость с плоскостью - прямую линию ( $\Sigma \cap \Gamma \Rightarrow a$ ).
5. Плоскость с поверхностью - плоскую кривую или плоскую ломаную ( $\Sigma \cap \Delta \Rightarrow m$ ).
6. Поверхность с поверхностью – пространственную кривую или несколько пространственных кривых, которые, в свою очередь, могут состоять из плоских кривых или плоских ломаных ( $\Delta \cap \Lambda \Rightarrow m$ ).

Из всего многообразия этих задач выделяются две общие задачи, которые называют **главными позиционными задачами**:

**Первая главная позиционная задача (1 ГПЗ)** – пересечение линии с поверхностью (первые три задачи).

**Вторая главная позиционная задача (2 ГПЗ)** – взаимное пересечение двух поверхностей (4, 5 и 6 задачи).

При этом следует помнить, что плоскость – это частный случай поверхности, поэтому условимся пересечение плоскостей или плоскости с поверхностью относить ко 2 ГПЗ.

При решении 2 ГПЗ сначала необходимо выяснить, что будет являться общим элементом у двух пересекающихся поверхностей. Чаще всего бывает следующее:

а). **Пересекаются два многогранника** – общий элемент есть пространственная ломаная линия, состоящая из отдельных звеньев (каждое звено - прямая линия), как результат пересечения граней многогранников; звенья между собой соединены в точках **A, B, C ...**, которые представляют собой точки пересечения рёбер первого многогранника с гранями второго и наоборот (рис. 2.1).

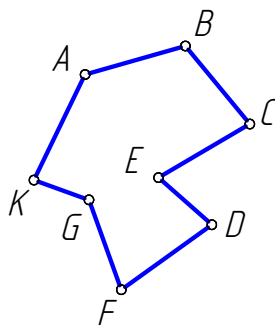


Рисунок 2.1 – Пространственная замкнутая ломаная линия

б). **Пересекаются многогранник с кривой поверхностью** (например, тор с пирамидой). Общий элемент – пространственная кривая линия, состоящая из отдельных звеньев. Каждое звено есть результат пересечения граней многогранника с кривой поверхностью (звенья  $m, n, k \dots$  – есть плоские кривые). Звенья между собой соединены в точках  $A, B, C, D$ , которые представляют собой результат пересечения рёбер многогранника с кривой поверхностью (рис. 2.2,а).

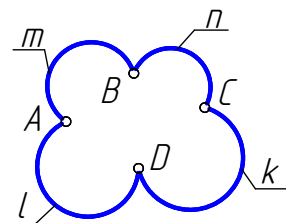


Рисунок 2.2,а. – Пространственная кривая линия, состоящая из отдельных звеньев

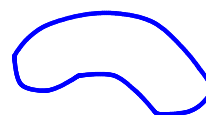


Рисунок 2.2,б. – Пространственная кривая линия

в). **Пересекаются две кривые поверхности** (например, сфера с конусом). Общий элемент – пространственная кривая линия (рис. 2.2,б).

Далее необходимо определить **количество** общих элементов пересекающихся поверхностей. Определяется оно в зависимости от **характера** пересечения поверхностей.

## 2.1 Характер пересечения поверхностей

Например, пересекаются конус  $\Phi$ , окружность основания которого параллельна  $\Pi_1$ , и фронтально проецирующий цилиндр  $\Delta$ , (рис. 2.3).

Такой характер пересечения, когда одна из поверхностей насквозь пронзает другую, называется **чистое проникание**. В этом случае линий пересечения две (на рис. 2.3 это  $m$  и  $n$ ).

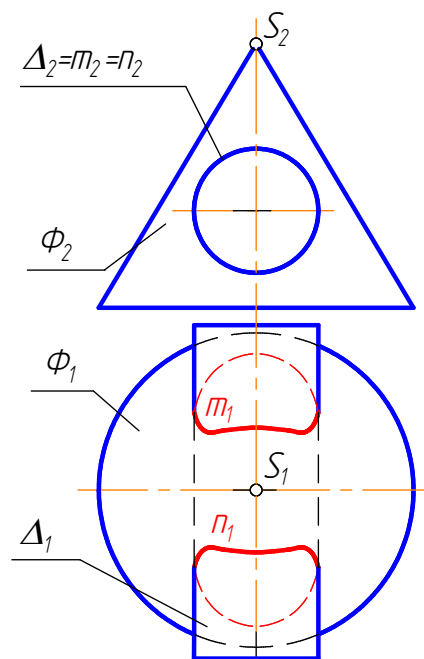


Рисунок 2.3 – Характер пересечения поверхностей (чистое проникание)

Характер пересечения поверхностей, представленный на рисунке 2.4, когда очерки поверхностей касаются в одной точке, является **частным случаем проникания**, когда линий пересечения две ( $m$  и  $n$ ), но с одной общей точкой ( $A$ ).

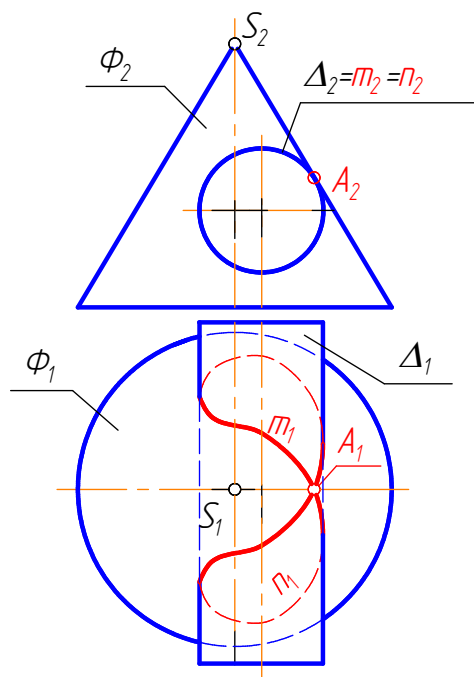


Рисунок 2.4 – Характер пересечения поверхностей (частный случай проникания)

Характер пересечения поверхностей, представленный на рисунке 2.5, когда одна из поверхностей "вдавливается" в другую, называется **вмятие**. В этом случае линия пересечения одна (на рис. 2.5 это –  $m$ ).

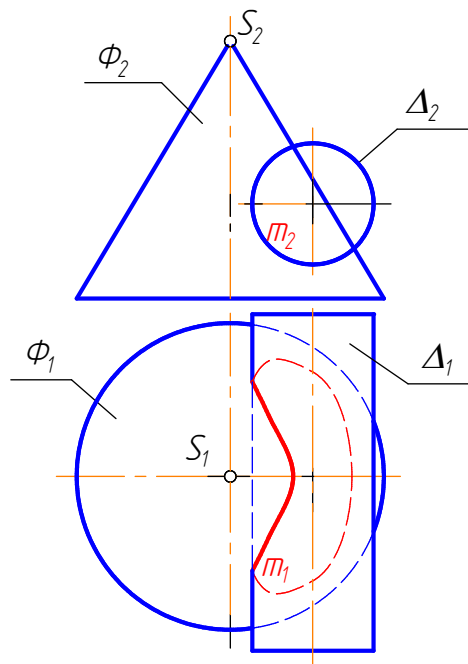


Рисунок 2.5 – Характер пересечения поверхностей (вмятие)

## 2.2 Решение главных позиционных задач

### 2.2.1 Три случая. Три алгоритма

Способ решения главных позиционных задач, или алгоритм решения, зависит от расположения пересекающихся геометрических фигур относительно плоскостей проекций.

Здесь имеет место три случая:

1. Обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение. Задачи решаются по **первому алгоритму**.
2. Одна из пересекающихся фигур – проецирующая, другая – непроекцирующая. Задачи решаются по **второму алгоритму**.
3. Обе пересекающиеся фигуры – непроекцирующие. Задачи решаются по **третьему алгоритму**.

Здесь уместно вспомнить, какие фигуры могут занимать **проецирующее** положение. Таковыми являются: **прямая, плоскость**, а из всех известных нам поверхностей проецирующее положение могут занимать только **призматическая** поверхность (частный случай – **призма**) и **цилиндрическая** поверхность (частный случай – **прямой круговой цилиндр**). На рисунке 2.6 показаны примеры горизонтально проецирующих фигур. Напомним, что главными проекциями у них являются: у прямой  $a$  – точка  $a_I$ , у плоскости  $\Sigma$  – прямая  $\Sigma_I$ , у призмы  $\Delta$  – треугольник  $\Delta_I$  (а в общем случае – или ломаная линия, или любой многоугольник), у цилиндра  $\Gamma$  – окружность  $\Gamma_I$  (в общем случае – замкнутая или разомкнутая кривая). Напомним также, что **главные проекции** проецирующих фигур обладают "собирательными" свойствами (рис. 2.6).



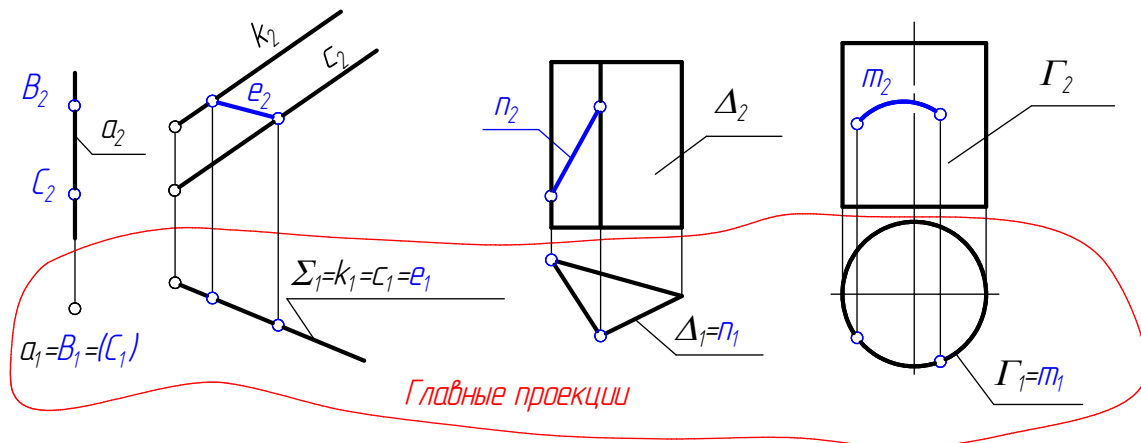


Рисунок 2.6 – Примеры горизонтально проецирующих фигур

### 2.2.2 Первый алгоритм

**Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение.**

Решение рассмотрим на конкретном примере.

**Задача:** Найти проекции точки пересечения горизонтально-проецирующей плоскости  $\Sigma(m \parallel n)$  с фронтально-проецирующей прямой  $a$ , (рис. 2.7).

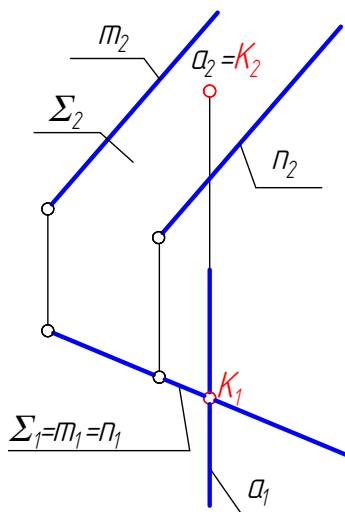


Рисунок 2.7 – Решение задачи по 1 алгоритму

**Алгоритм:** Так как в пересечении участвует прямая линия ( $a$ ), то это – **первая главная позиционная задача**. Обе пересекающиеся фигуры – проецирующие относительно разных плоскостей проекций. Решение начинаем с фронтальной проекции.

1. Точка  $K$  является общим элементом плоскости  $\Sigma$  и прямой  $a$ , следовательно,  $K \in \Sigma$  и  $K \in a$ . Но, если  $K \in a$ , то  $K_2 \in a_2$ , а, поскольку  $a_2$  - это точка (главная проекция, обладающая **собирательными** свойствами), то  $K_2 = a_2$ .
2. Находим горизонтальную проекцию точки  $K$ . Так как плоскость  $\Sigma$  на  $\Pi_1$  проецируется в прямую линию  $\Sigma_1$ , то  $K_1$ , как общий элемент  $\Sigma$  и  $a$ , будет располагаться на пересечении  $\Sigma_1$  и  $a_1$ .

Выполним краткую алгоритмическую запись вышеизложенного:

$\Sigma(m \parallel n) \cap a = K$ ; 1 ГПЗ, 1 алгоритм.

1.  $K \in a, a \perp \Pi_2 \Rightarrow K_2 = a_2$ .

$$2. \quad K \in a, K \in \Sigma, \Sigma \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow K_1 = \Sigma_1 \cap a_1.$$

Таким образом, решение 1 ГПЗ по первому алгоритму заключается в следующем:

**Проекции общего элемента на чертеже уже присутствуют. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Решение сводится к их нахождению и обозначению.**

Вторую главную позиционную задачу решим в соответствии с рассмотренным алгоритмом.

**Задача:** найти проекции линии пересечения горизонтально проецирующего цилиндра  $\Phi$  с фронтально проецирующей призмой  $\Gamma$  (рис. 2.8).

**Алгоритм:** Пересекаются две поверхности, это – 2 ГПЗ. Вначале анализируем, что должно получиться в результате пересечения. Так как характер пересечения – вмятие, то общим элементом должна быть одна пространственная линия –  $m$ .

Обе фигуры, **проецирующие** относительно разных плоскостей проекций. Следовательно, согласно 1 алгоритму, проекции общего элемента должны совпадать с главными проекциями поверхностей. На фронтальной проекции  $m_2$  должна совпадать с  $\Gamma_2$ . Однако из чертежа (рис. 2.8) видно, что часть главной проекции призмы  $\Gamma_2$  выходит за пределы цилиндра, а это означает, что совпадение проекции линии пересечения  $m_2$  с главной проекцией призмы  $\Gamma_2$  только частичное. Следовательно, нужно найти границы общей части.

На рисунке 2.9 линия  $m_2$ , совпадающая с  $\Gamma_2$  в пределах цилиндра, выделена красным цветом – это фронтальная проекция линии пересечения поверхностей.

Аналогичные рассуждения проведём для нахождения горизонтальной проекции линии пересечения  $m_1$ . Она совпадает с главной проекцией цилиндра  $\Phi_1$  в пределах призмы.

Алгоритмическая запись будет выглядеть следующим образом:

$\Phi \cap \Gamma = m$ ; 2 ГПЗ, 1 алгоритм.

$$1. \quad m \cap \Gamma, \Gamma \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow m_2 = \Gamma_2$$

$$2. \quad m \cap \Phi, \Phi \perp\!\!\!\perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 = \Phi_1.$$

Проанализируем, из чего состоит линия пересечения  $m$ . Как мы уже предполагали, это пространственная линия. Она состоит из двух плоских кривых  $a$  и  $b$  (рис. 2.10, 2.11), получающихся от пересечения цилиндра двумя гранями призмы, которые на рисунке 2.11 обозначены плоскостями  $\Sigma$  и  $\Lambda$ .

Плоскость  $\Lambda(\Lambda_2)$  – это горизонтальная плоскость уровня. Она параллельна окружности основания цилиндра, поэтому она пересечёт цилиндр  $\Phi$  тоже по окружности. Тогда ли-

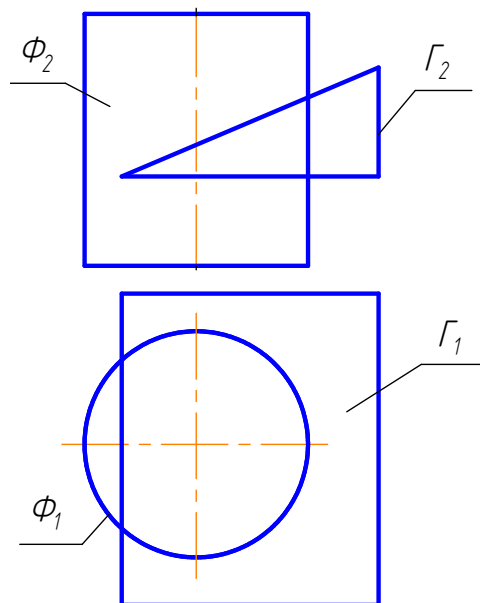


Рисунок 2.8 – Условие 2 ГПЗ

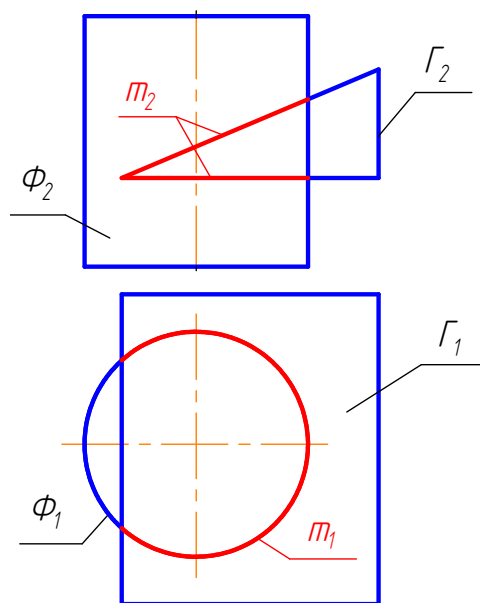


Рисунок 2.9 – Проекции линии пересечения  $m$

ния  $a$  есть дуга окружности, которая спроецируется на  $\Pi_2$  в виде прямой ( $a_2$ ), а на  $\Pi_1$  – в натуральную величину, т.е. в виде дуги окружности ( $a_1$ ).

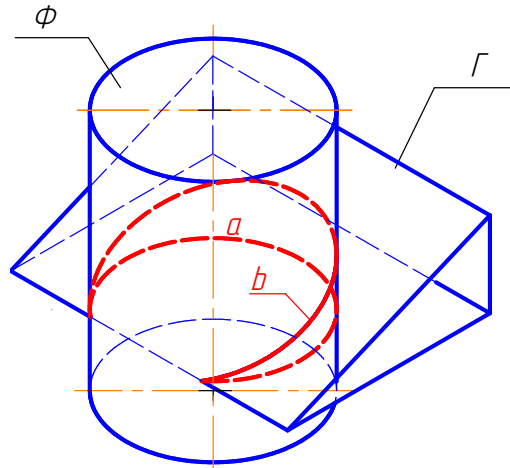


Рисунок 2.10 – Пространственное изображение линии пересечения ( $a \cup b = m$ )

Плоскость  $\Sigma(\Sigma_2)$  – фронтально проецирующая и пересечёт цилиндр  $\Phi$  по эллипсу. Тогда линия  $b$  есть дуга эллипса, которая спроецируется на  $\Pi_2$  в виде прямой ( $b_2$ ), а на  $\Pi_1$  – в виде дуги окружности ( $b_1$ ).

Таким образом, линия пересечения двух заданных поверхностей есть пространственная линия, состоящая из двух плоских кривых - дуги окружности и дуги эллипса.

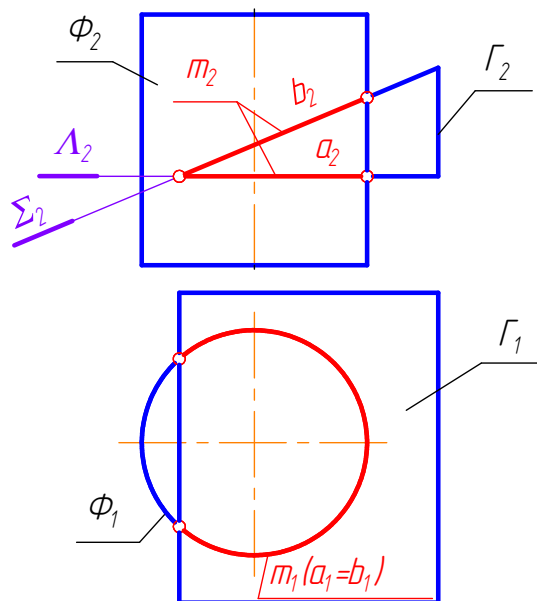


Рисунок 2.11 – Проекции линии пересечения ( $a \cup b = m$ )

Скорректируем алгоритм решения позиционных задач в 1 случае:

**Проекция общего элемента на чертеже уже есть. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части. Решение сводится к их нахождению и обозначению.**

### 2.2.3 Второй алгоритм

Решение задач в случае, когда одна из пересекающихся фигур проецирующая, вторая - непроекцирующая.

1.  $K \in a, a \perp\!\!\!\perp \Pi_2 \Rightarrow K_2 = a_2$ .
2.  $K_1 \in \Sigma, K \in 12, 12 \subset \Sigma \Rightarrow K_1 = a_1 \cap 1_1 2_1$ .

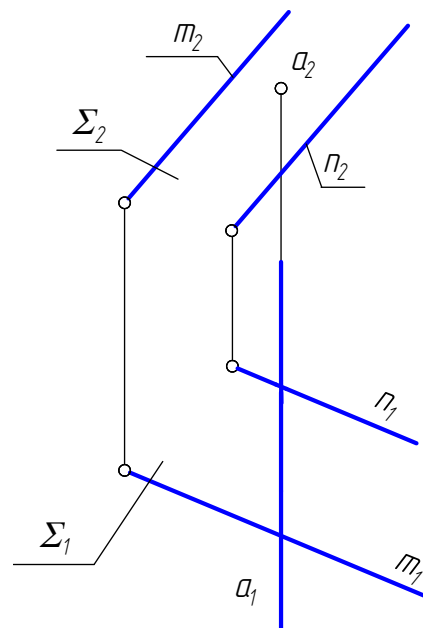


Рисунок 2.12 – Условие задачи

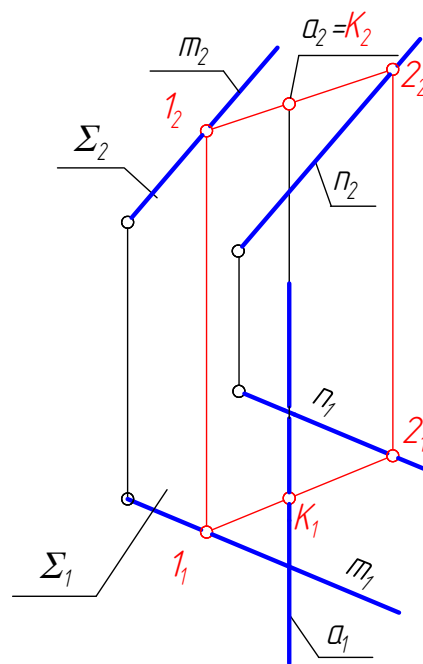


Рисунок 2.13 – Решение задачи по второму алгоритму

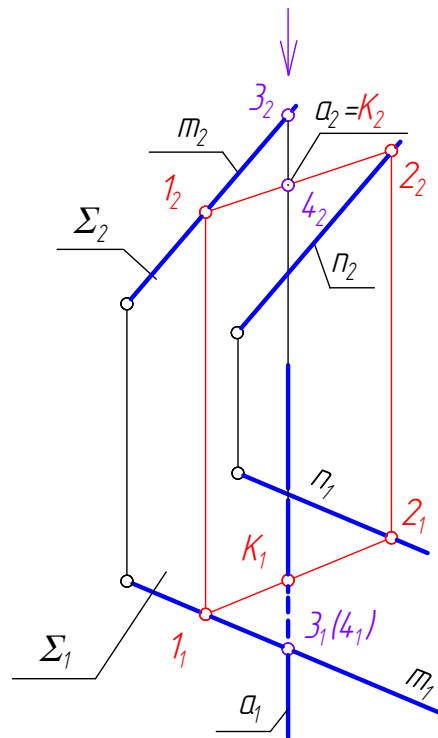


Рисунок 2.14 – Определение видимости участков прямой (метод конкурирующих точек)

Рассмотрим ещё одну задачу: Пересекаются прямая общего положения  $a$  с поверхностью горизонтально проецирующего цилиндра  $\Gamma$ , (рис. 2.15). Найти проекции точек пересечения.

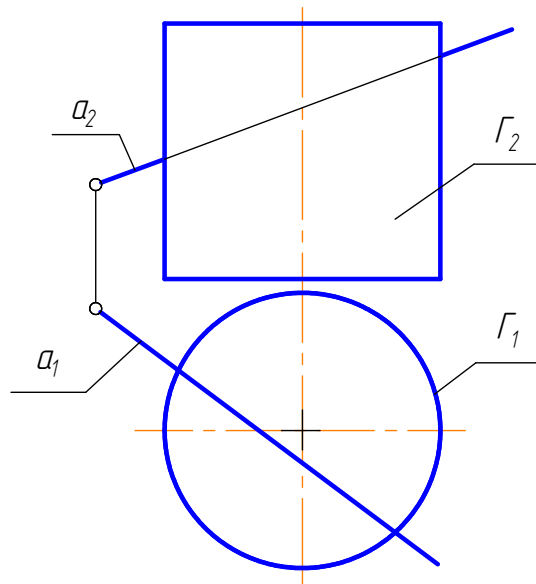


Рисунок 2.15 – Условие задачи

**Решение. 1 ГПЗ, 2 алгоритм.** Горизонтальная проекция цилиндра – окружность  $\Gamma_1$ , следовательно, в результате пересечения получаются 2 точки  $M$  и  $N$ , горизонтальные проекции которых  $M_1$  и  $N_1$  располагаются на пересечении  $\Gamma_1$  и  $a_1$ , (рис. 2.16).

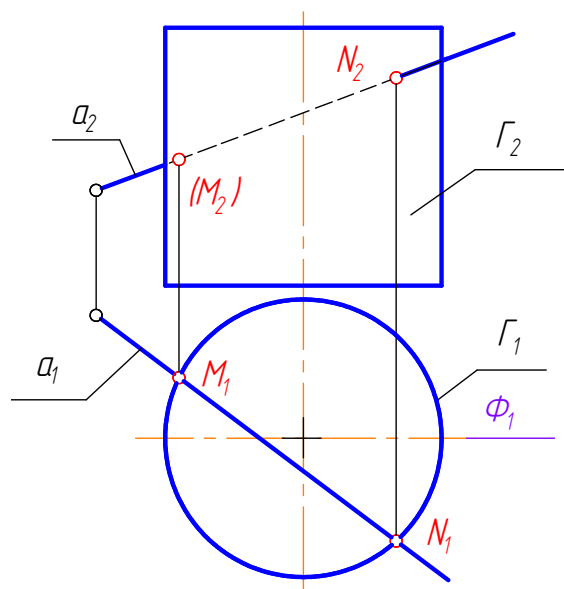


Рисунок 2.16 – Решение задачи. Определение видимости

Фронтальные проекции точек пересечения  $M_2$  и  $N_2$  находим по принадлежности прямой  $a$  с использованием линии связи. Видимость на  $\Pi_2$  определяем по цилиндру: точка  $N_1$  расположена **перед** плоскостью фронтального меридиана  $\Phi$ , и  $N_2$  - видимая;  $M_1$  расположена **за** плоскостью фронтального меридиана  $\Phi$ , и  $M_2$  – невидимая. Часть прямой  $a$  между точками  $M$  и  $N$  находится внутри цилиндра, следовательно, на  $\Pi_2$  участок прямой между точками  $M_2$  и  $N_2$  невидимый. Участок прямой между точкой  $M_2$  и очерковой образующей цилиндра  $l_2$  также невидим, так как находится **за** плоскостью фронтального меридиана. Алгоритмическая запись решения:

$\Gamma \cap a = M, N$ , 1 ГПЗ, 2 алгоритм.

1.  $M, N \in \Gamma, \Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow M_1, N_1 = \Gamma_1 \cap a_1$ .
2.  $M, N \in a \Rightarrow M_2, N_2 \in a_2$ .

**Вывод:** Решение задач по 2 алгоритму сводится к следующему:

1. Выделяют из двух заданных фигур проецирующую и отмечают её главную проекцию.
2. Ставят обозначение той проекции искомого общего элемента, которая совпадает с главной проекцией проецирующей фигуры. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части.
3. Вторую проекцию общего элемента находят по условию его принадлежности непроецирующей фигуре.
4. Определяют видимость проекций общих элементов и пересекающихся фигур.

## 2.3 Конические сечения

Решение второй главной позиционной задачи по второму алгоритму рассмотрим на примере конических сечений.

Ещё в Древней Греции был известен тот факт, что при пересечении конуса различными плоскостями можно получить прямые линии, кривые второго порядка и, как вырожденный случай, точку.

На рисунке 2.17 показана фронтальная проекция конуса  $\Omega_2$ , пересечённого фронтально проецирующими плоскостями  $\Lambda_2$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Sigma_2$ ; в сечениях получаются, соответственно, две прямые  $a$  и  $b$ , окружность  $c$ , эллипс  $d$ , парабола  $m$  и гипербола  $k$ .

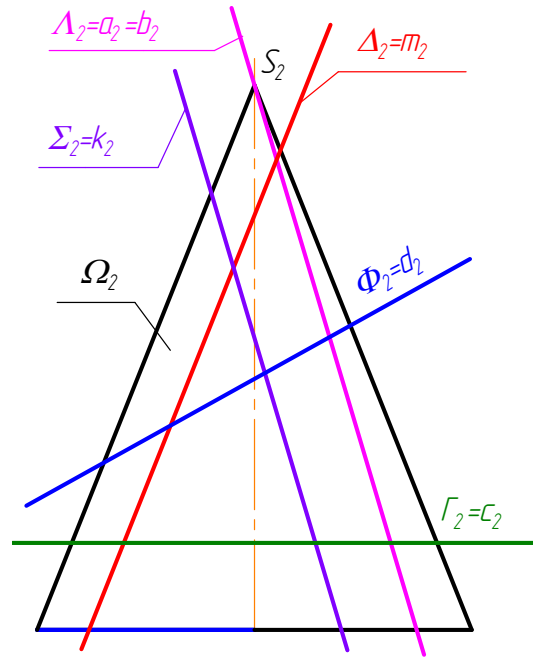


Рисунок 2.17 – Конические сечения

Рассмотрим каждый случай получения конических сечений, представленных на рисунке 2.17, с точки зрения решения 2 ГПЗ по второму алгоритму.

1. Две образующие получатся в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит через его вершину (рис. 2.18).

**Алгоритм:**

$\Omega \cap \Lambda = a, b$ ? 2 ГПЗ? второй алгоритм

1.  $\Lambda \perp P_2 \Rightarrow a_2 b_2 = \Lambda_2$

2.  $a_1 b_1 \subset \Omega$

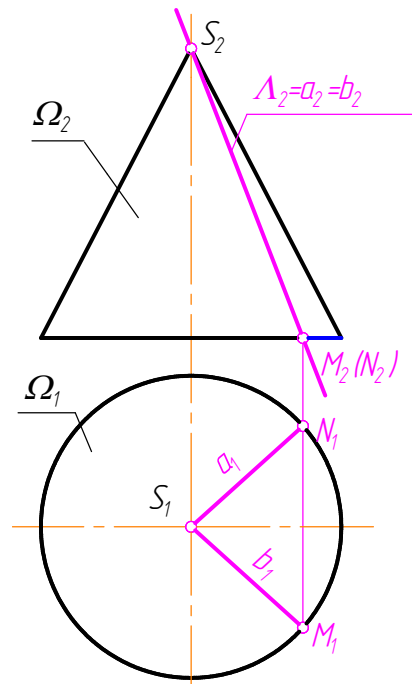


Рисунок 2.18 – Плоскость  $\Lambda$  проходит через вершину конуса  $\Omega$

Частным случаем такого вида пересечения конуса плоскостью является такое положение, при котором плоскость  $\Lambda$  проходит через ось  $i$  конуса (на рис. 2.19  $\Lambda_1$  совпадает с плоскостью фронтального меридиана).

Результатом пересечения являются образующие конуса с максимальным углом между ними (на рис. 2.19 это очерковые образующие конуса  $SA$  и  $SB$ ).

**Алгоритм:**

$\Omega \cap \Lambda = SA + SB$ . 2 ГПЗ, 2 алг.

1.  $\Lambda \perp \Pi_1 \Rightarrow S_1 A_1 + S_1 B_1 = \Lambda_1$ .

2.  $S_2 A_2 + S_2 B_2 \subset \Omega$ .

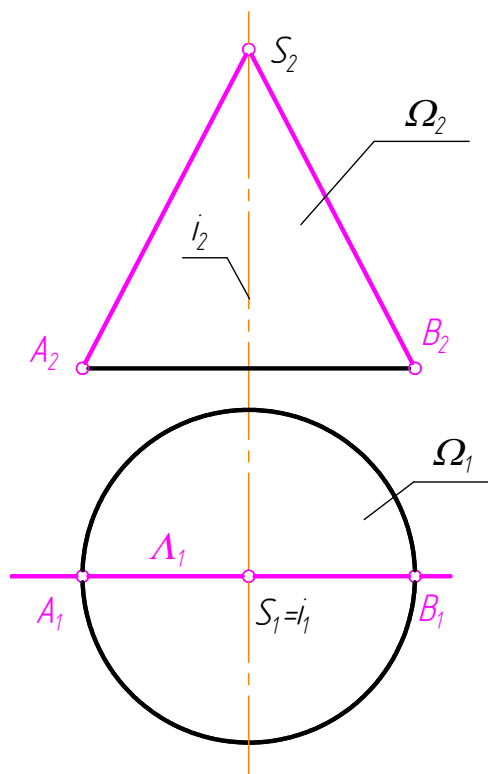


Рисунок 2.19 – Плоскость  $\Lambda$  проходит через ось  $i$  конуса  $\Omega$

2. **Окружность** получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, параллельна окружности основания  $n$  (рис. 2.20), а значит, перпендикулярна оси  $i$  конуса.

**Алгоритм:**

$\Gamma \cap \Omega = c$ , 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

1.  $\Gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow c_2 = \Gamma_2$ .

2.  $c_1 \subset \Omega$ .

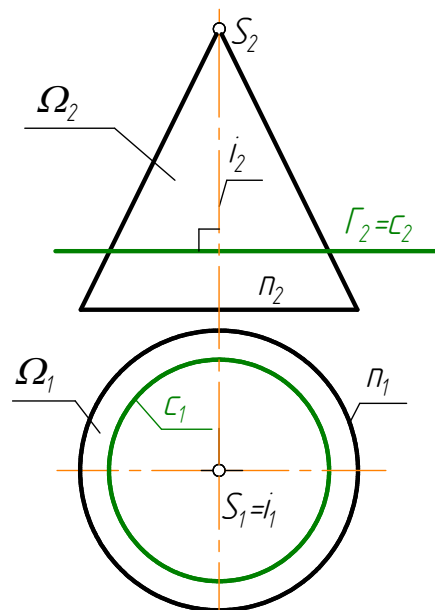


Рисунок 2.20 – Плоскость  $\Gamma$  перпендикулярна оси  $i$  конуса  $\Omega$



**Вырожденный случай** – плоскость  $\Gamma(\Gamma_2)$  проходит через вершину  $S$  конуса  $\Omega$  (рис. 2.21). Тогда эта плоскость пересечёт конус только в одной точке.  $\Omega \cap \Gamma(\Gamma_2) = K$ .

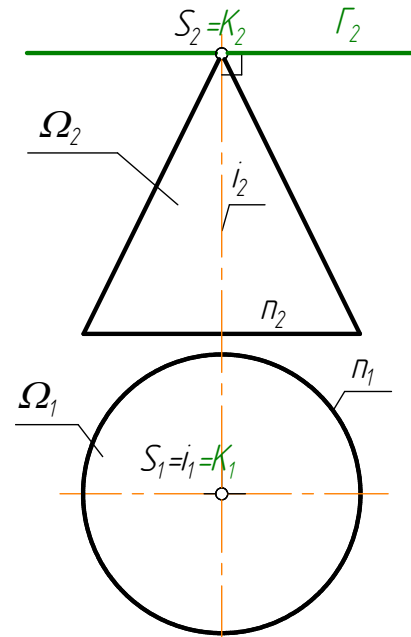


Рисунок 2.21 – Плоскость  $\Gamma$  проходит через вершину конуса  $S$

3. **Эллипс** получится в сечении, если плоскость не перпендикулярна оси конуса и пересекает все его образующие (рис. 2.22, 2.23, 2.24).

**Алгоритм:**

$\Phi \cap \Omega = d$ . 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

1.  $\Phi \perp P_2 \Rightarrow d_2 = \Phi_2$ .
2.  $d_1 \subset \Omega$ .

Построение эллипса начинаем с его осей (рис. 2.22).  $AB$  – большая ось эллипса, причём,  $A_2B_2$  – её натуральная величина,  $A_1B_1$  – её проекция.  $CE$  – малая ось эллипса, она перпендикулярна большой оси и делит её пополам. Чтобы найти  $CE$ , разделим  $A_2B_2$  с помощью циркуля пополам, получим точки  $C_2, E_2$ , и радиусом  $R$ , равным радиусу параллели, на которой лежат точки  $C$  и  $E$ , сделаем засечки на линии связи, проведённой от точек  $C_2, E_2$ .

Получим точки  $C_1$  и  $E_1$ . Эти точки – фронтально конкурирующие,  $C_1$  – ближе к нам, поэтому  $E_2$  – невидимая.

Далее эллипс можно строить двояко:

1. Можно строить его по двум осям любым из известных способов (например, приведённым в разделе "Кривые линии"). Этот способ показан на рисунке 2.23.

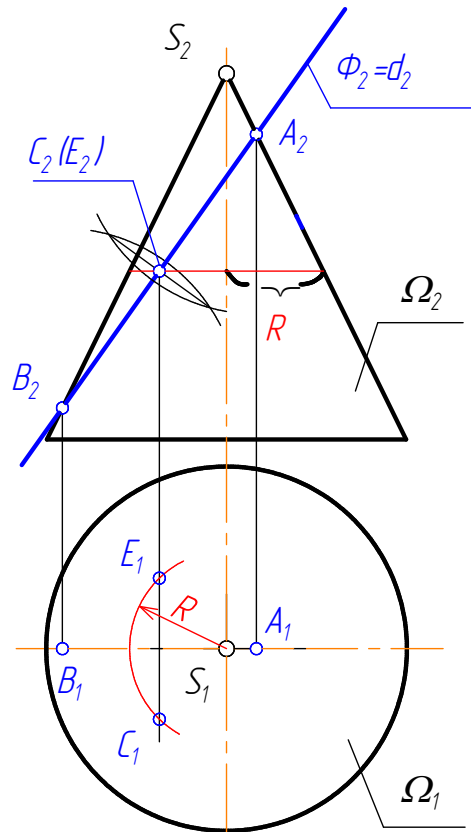


Рисунок 2.22 – Плоскость пересекает все образующие конуса

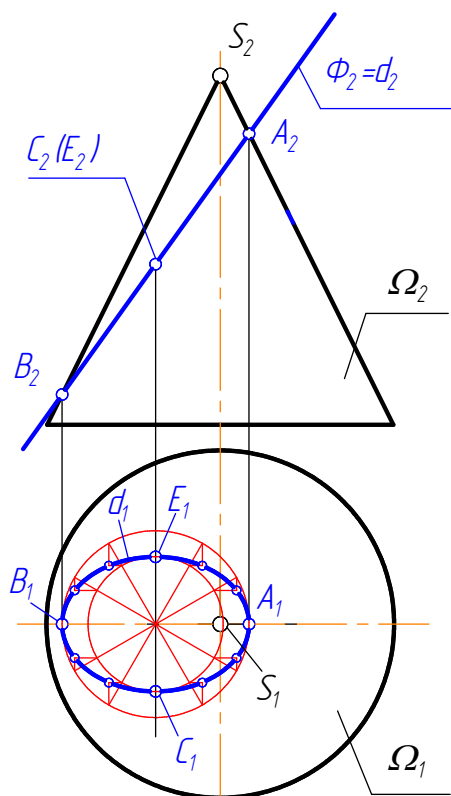


Рисунок 2.23 – Один из способов построения эллипса

2. Можно строить эллипс по точкам, по принадлежности конусу, особенно, если в какой-либо конкретной задаче эллипс получается неполным. Такое решение показано на рисунке 2.24.

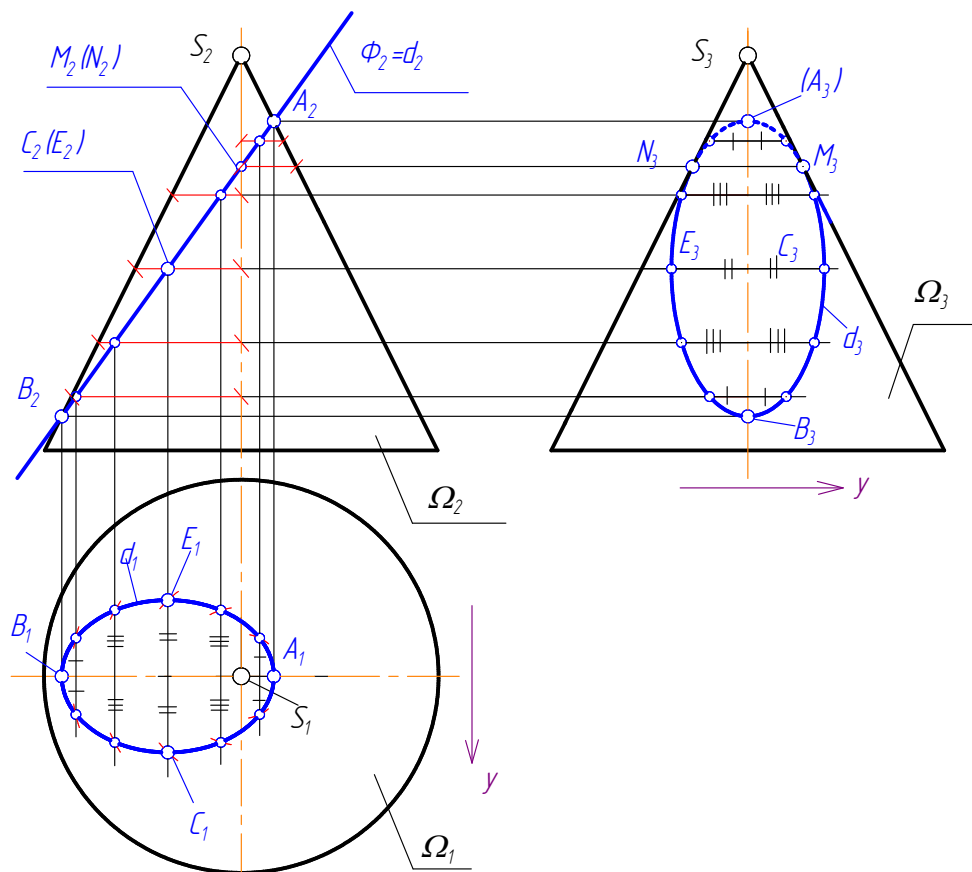


Рисунок 2.24 – Построение эллипса по точкам, по принадлежности конусу

Построим три проекции линии пересечения конуса с плоскостью  $\Phi$ . Горизонтальную проекцию точек  $A, B, C, E$  строим так, как показано на рисунке 2.22. Остальные, промежуточные точки строим аналогично точкам  $C$  и  $E$ , по принадлежности параллелям конуса. Радиусом параллели, на которой расположена точка, равным расстоянию от оси до очерка конуса, из центра  $S_1$  делаем засечки на линиях связи от соответствующих точек. Соединяем точки с помощью лекала и получаем горизонтальную проекцию эллипса. При данном расположении конуса эллипс на  $\Pi_1$  виден весь.

Построение эллипса на  $\Pi_3$  начинаем также с характерных точек. Ими являются:

1) Точки  $A$  и  $B$ , которые расположены в плоскости фронтального меридиана, следовательно, на  $\Pi_2$  – на очерковых образующих, а на  $\Pi_3$  – на оси.

2) Точки  $M$  и  $N$  принадлежат профильным образующим – они определяют видимость эллипса относительно  $\Pi_3$ : часть эллипса от точки  $B$  до точек  $M$  и  $N$  расположена левее профильных образующих, следовательно, на  $\Pi_3$  она видна; соответственно, часть эллипса от точек  $M$  и  $N$  до точки  $A$  на  $\Pi_3$  не видна.

3) Промежуточные точки на  $\Pi_3$  строим, откладывая координату  $Y$  для каждой точки (расстояния, помеченные одной, двумя или тремя рисками) с  $\Pi_1$  на  $\Pi_3$ . Соединяем точки с учётом видимости и получаем профильную проекцию эллипса.

4. **Парабола** получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит параллельно только одной его образующей (рис. 2.25).

**Алгоритм:**  $\Omega \cap \Delta = m$ .  $\Delta \parallel SK$ .

**2 ГПЗ, второй алгоритм.**

1.  $\Delta \perp \Pi_2 \Rightarrow m_2 = \Delta_2$ .

2.  $m_1 \subset \Omega$ .

Построение параболы начинаем с характерных точек:

1)  $A$  – вершина параболы.  $A_2$  принадлежит очерковой образующей конуса, следовательно,  $A$  расположена в плоскости фронтального меридиана  $\Rightarrow A_1$ .

2) Точки  $B$  и  $C$  – низшие точки параболы, принадлежат окружности основания  $n$  конуса, на  $\Pi_1$  находим их с помощью линии связи тоже без дополнительных построений.

Промежуточные точки находим так же, как и в случае построения эллипса, то есть по принадлежности параллелям конуса. Соединяем точки с помощью лекала и получаем параболу.

Так как плоскость  $\Delta$  параллельна только одной образующей конуса, то парабола имеет **одну несобственную точку**.

Поэтому, в частном случае, когда плоскость  $\Delta$  касается одной образующей  $SK$  конуса (рис. 2.26), то получается **вырожденный вид параболы** – **прямая  $m$** , совпадающая с  $SK$ .

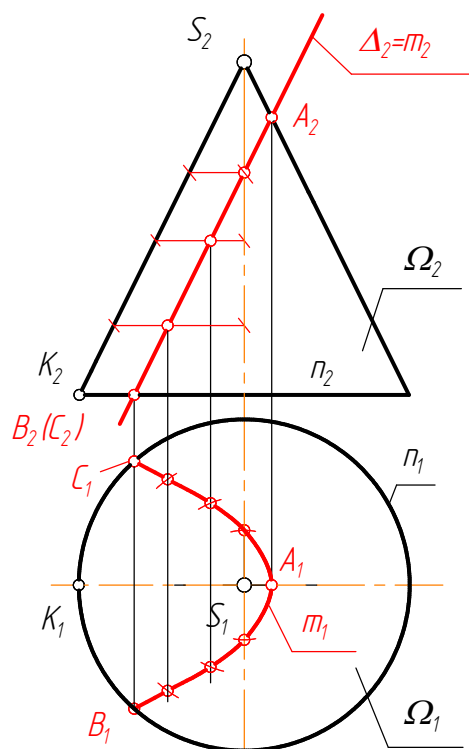


Рисунок 2.25 – Плоскость, пересекая конус, проходит параллельно только одной его образующей

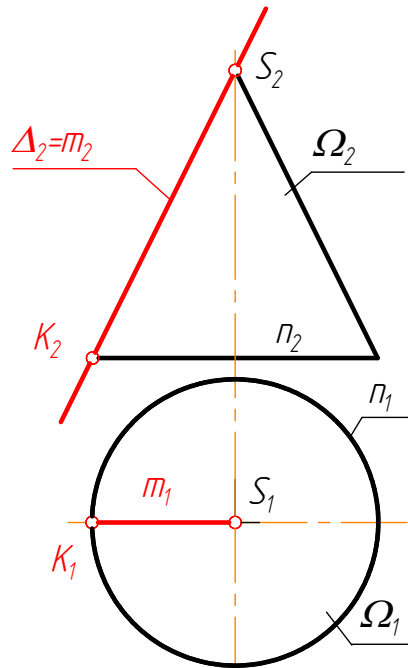


Рисунок 2.26 – Плоскость  $\Delta$  касается одной образующей  $SK$  конуса

5. **Гипербола** получится в сечении, если плоскость при пересечении с конусом параллельна одновременно **двум** образующим конуса (рис. 2.27).

Алгоритм:  $\Omega \cap \Sigma = k$ .  $\Sigma \parallel SM$ ,  $\Sigma \parallel SN$ . 2 ГПЗ. *второй алгоритм.*

1.  $\Sigma \perp P_2 \Rightarrow k_2 = \Sigma_2$ .

2.  $k_1 \subset \Omega$ .

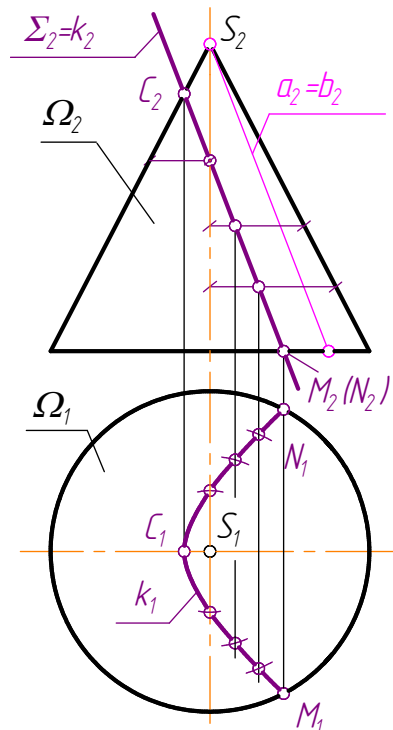


Рисунок 2.27 – Плоскость при пересечении с конусом параллельна одновременно двум образующим конуса

Построение гиперболы, представленной на рисунке 2.27, полностью идентично построению параболы (рис. 2.25).

Так как плоскость  $\Sigma$  параллельна двум образующим конуса  $a$  и  $b$ , то гипербола имеет две несобственные точки, и вырожденный вид гиперболы – две прямые  $a$  и  $b$  (рис. 2.18, 2.19), когда плоскость проходит через вершину конуса.

Рассмотрим частный случай построения гиперболы, когда плоскость  $\Sigma$  перпендикулярна  $\Pi_1$ , т.е. является горизонтально проецирующей (рис. 2.28). Построим три проекции линии пересечения конуса  $\Omega$  с такой плоскостью  $\Sigma(\Sigma_I)$ .

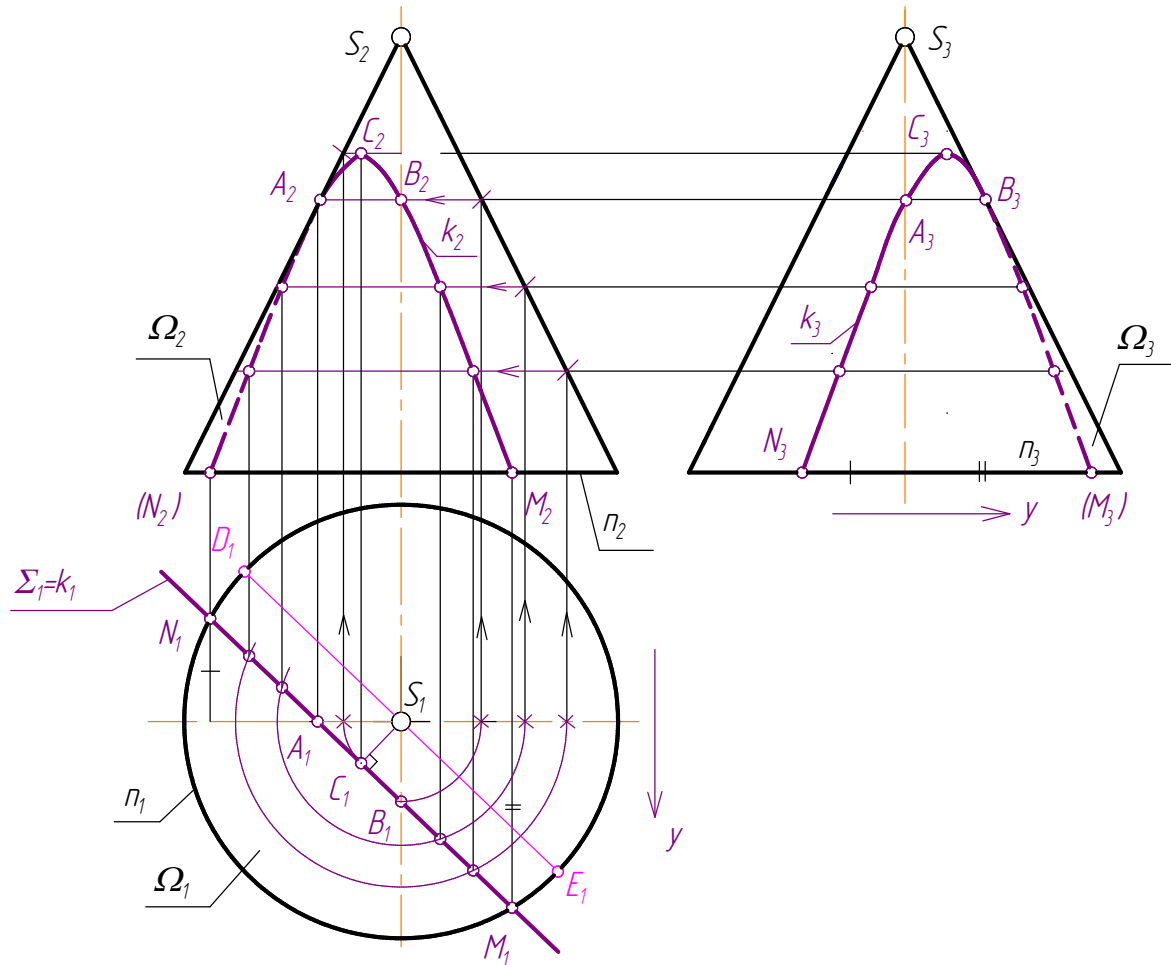


Рисунок 2.28 – Частный случай построения гиперболы, когда плоскость  $\Sigma$  перпендикулярна  $\Pi_1$

#### Алгоритм:

$\Omega \cap \Sigma = k$ .  $\Sigma \parallel SO$ ,  $\Sigma \parallel SE$ ,  $\Sigma \perp \Pi_1$ . 2 ГПЗ, второй алгоритм

1.  $\Sigma \perp \Pi_1 \Rightarrow k_I = \Sigma_I$ .

2.  $k_2 \subset \Omega_2$ .

Построение гиперболы начинаем с характерных точек:

Точки  $M$  и  $N$  принадлежат окружности основания конуса  $\Rightarrow M_2, N_2 \subset n_2$ .  $M_3$  и  $N_3$  находим на  $n_3$ , откладывая координату  $Y$  этих точек с  $\Pi_1$  (эти расстояния отмечены двумя и одной черточками соответственно).

Точка  $A$  располагается в плоскости фронтального меридиана и определяет видимость гиперболы относительно  $\Pi_2$ : точка  $N_2$  – невидимая.  $A_2$  лежит на очерковой образующей конуса, а  $A_3$  – на оси.

Точка  $C$  – вершина гиперболы. Она лежит на перпендикуляре, проведённом от  $S_1$  к  $\Sigma_I$ .  $C_2$  находим по принадлежности параллели конуса, проведённой через  $C_1$ .  $C_3$  строим аналогично точкам  $M_3$  и  $N_3$ .

Точка  $B$  лежит в плоскости профильного меридиана и определяет видимость гиперболы относительно  $\Pi_3$ .  $B_2$  находим по принадлежности параллели, проведённой через  $B_1$ ,  $B_3$  лежит на очерковой образующей конуса. Часть гиперболы от  $B_3$  до  $M_3$  невидимая.

Промежуточные точки на  $\Pi_2$  находим по принадлежности соответствующим параллелям, аналогично точке  $C$ , на  $\Pi_3$  – по координатам  $Y$  этих точек. Соединяем точки с учётом видимости с помощью лекала и получаем фронтальную и профильную проекции

Рассмотрим ещё одну задачу на пересечение поверхностей, из которых одна проецирующая, вторая – непроекцирующая.

**Задача:** Построить линию пересечения сферы  $\Sigma$  и горизонтально проецирующей призмы  $\Gamma$  (рис. 2.29).

**Алгоритм: 2 ГПЗ, второй алгоритм.**

1. Вначале определяем, что должно получиться в результате пересечения. Характер пересечения – частный случай вмятия, с одной общей точкой. Призма – трёхгранная, значит можно рассматривать пересечение сферы тремя отдельными плоскостями:  $\Delta$ ,  $\Phi$  и  $\Lambda$ . Следовательно, линией пересечения является пространственная линия, состоящая из трёх плоских кривых второго порядка: двух дуг эллипсов ( $\Sigma \cap \Phi = a$ ,  $\Sigma \cap \Lambda = b$ ) и одной дуги окружности ( $\Sigma \cap \Delta = c$ ).

2. Поскольку поверхность призмы – горизонтально проецирующая, то горизонтальная линия пересечения совпадает с  $\Gamma_1$ .

3. Фронтальную проекцию линии пересечения сферы с любой из плоскостей, например,  $\Phi$  строим по принадлежности сфере  $a \subset \Sigma \Rightarrow a_2 \subset \Sigma_2$  (рис. 2.30).

Построения начинаем с характерных точек: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Точка 1 принадлежит экватору сферы  $\Rightarrow 1_2$ ; точки 2 и 5 принадлежат фронтальному меридиану сферы и определяют видимость эллипса  $a$  относительно  $\Pi_2 \Rightarrow 2_2$  и  $5_2$ ; точки 3 и 4 являются конечными точками дуги эллипса  $a \Rightarrow 3_2$  и  $4_2$ ; точки 6 и 7 – высшая и низшая точки эллипса  $a$ . Промежуточные точки, так же, как точки 3, 4, 6, 7, находим по принадлежности параллелям сферы. Проводим  $a_2$  с учётом видимости.

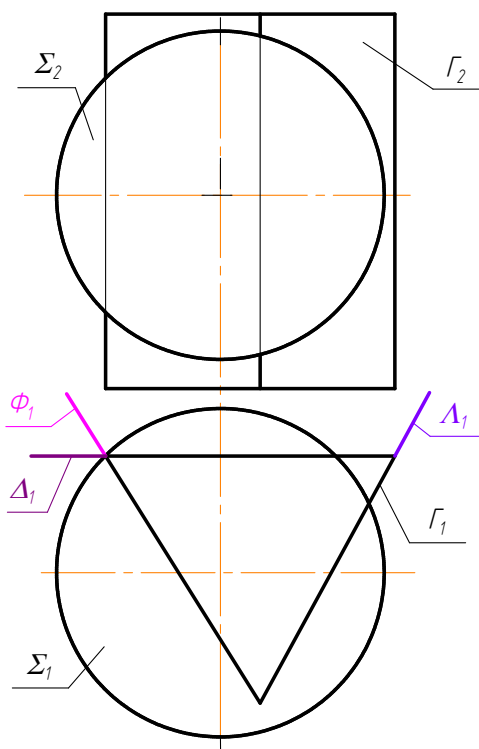


Рисунок 2.29 – Условие задачи на построение линии пересечения сферы и призмы гиперболы.

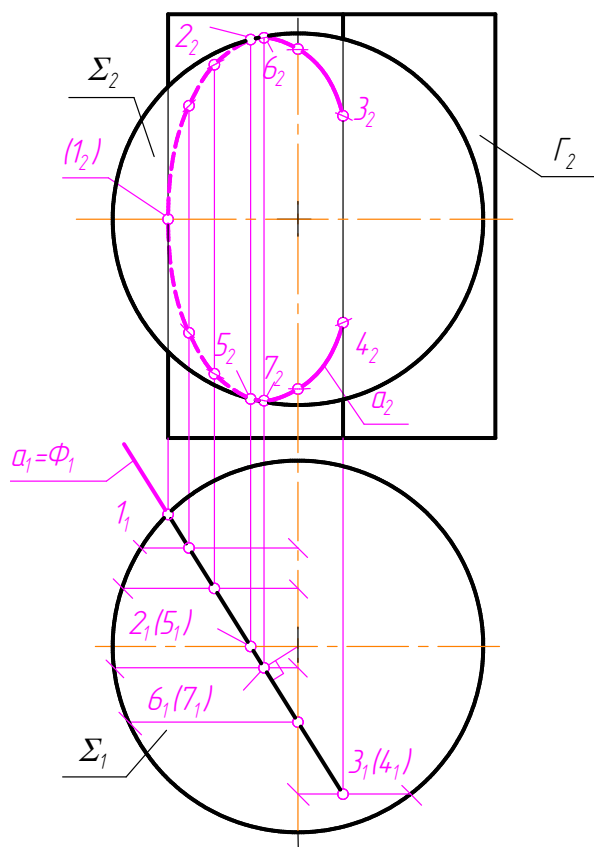


Рисунок 2.30 – Построение линии пересечения сферы  $\Sigma$  и горизонтально проецирующей призмы  $\Gamma$

4. Аналогично строим линию пересечения сферы с плоскостью  $\Lambda$  (рис. 2.31):  $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2 \subset \Sigma_2$ .

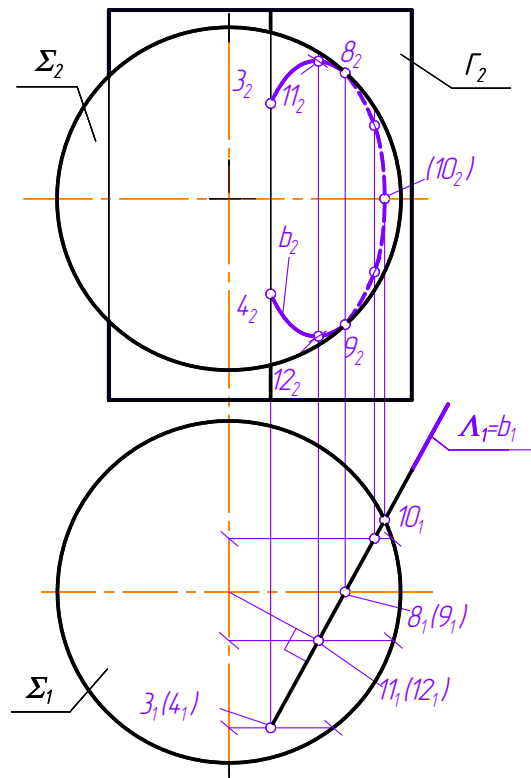


Рисунок 2.31 – Построение линии пересечения сферы  $\Sigma$  с плоскостью  $\Lambda$

Результат пересечения сферы  $\Sigma$  с плоскостью  $\Delta$  – окружность  $c$  (рис. 2.32) расположена за плоскостью фронтального меридиана, следовательно,  $c_2 \subset \Sigma_2$  – невидимая.

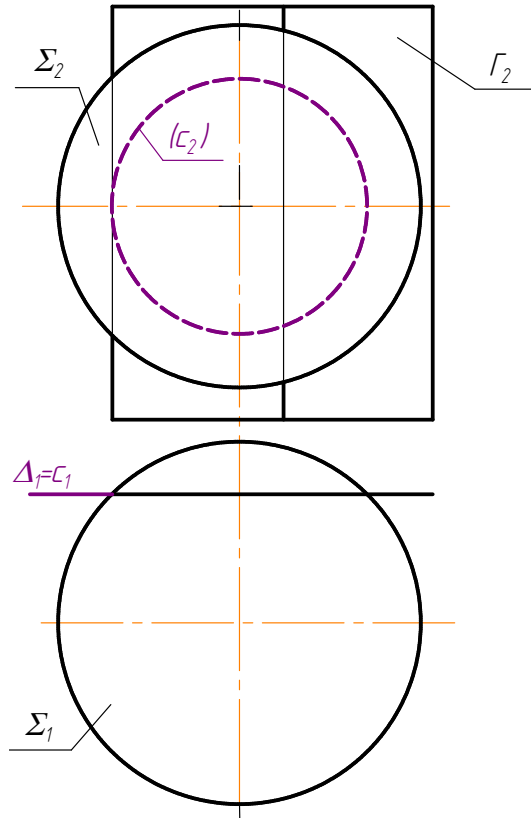


Рисунок 2.32 – Результат пересечения сферы  $\Sigma$  с плоскостью  $\Delta$

На рисунке 2.33 показан общий результат решения задачи с учётом видимости поверхностей.

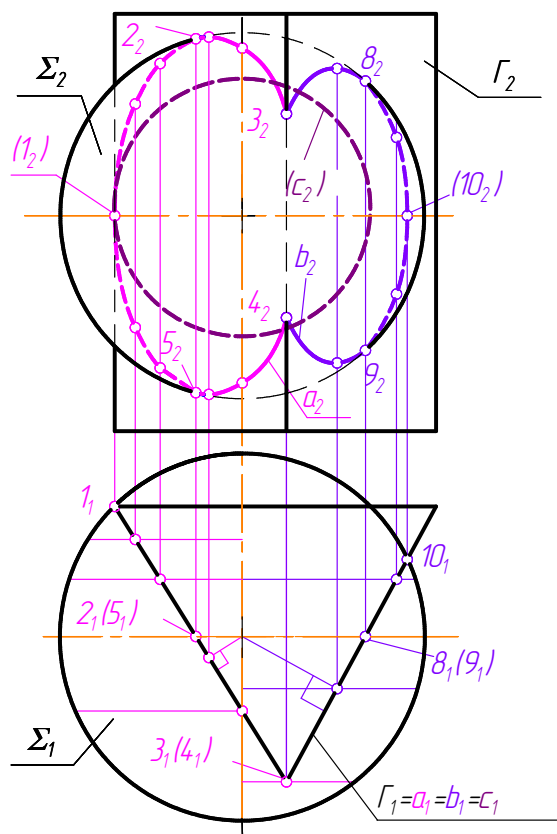


Рисунок 2.33 – Общий результат решения задачи с учётом видимости поверхностей

**Алгоритм:**  $\Sigma \cap \Gamma = a, b, c$ .  $\Gamma \parallel \Pi_1$ . 2 ГПЗ, второй алгоритм.

1.  $\Gamma \perp \Pi_1 \Rightarrow a_1, b_1, c_1 = \Gamma_1$ .

2.  $a_2, b_2, c_2 \subset \Sigma$ .

Как Вы думаете, верно ли расставлены на  $\Pi_2$ , (рис. 2.34) номера фигур сечения, соответствующие секущей плоскости  $\Sigma$  на  $\Pi_1$ ?



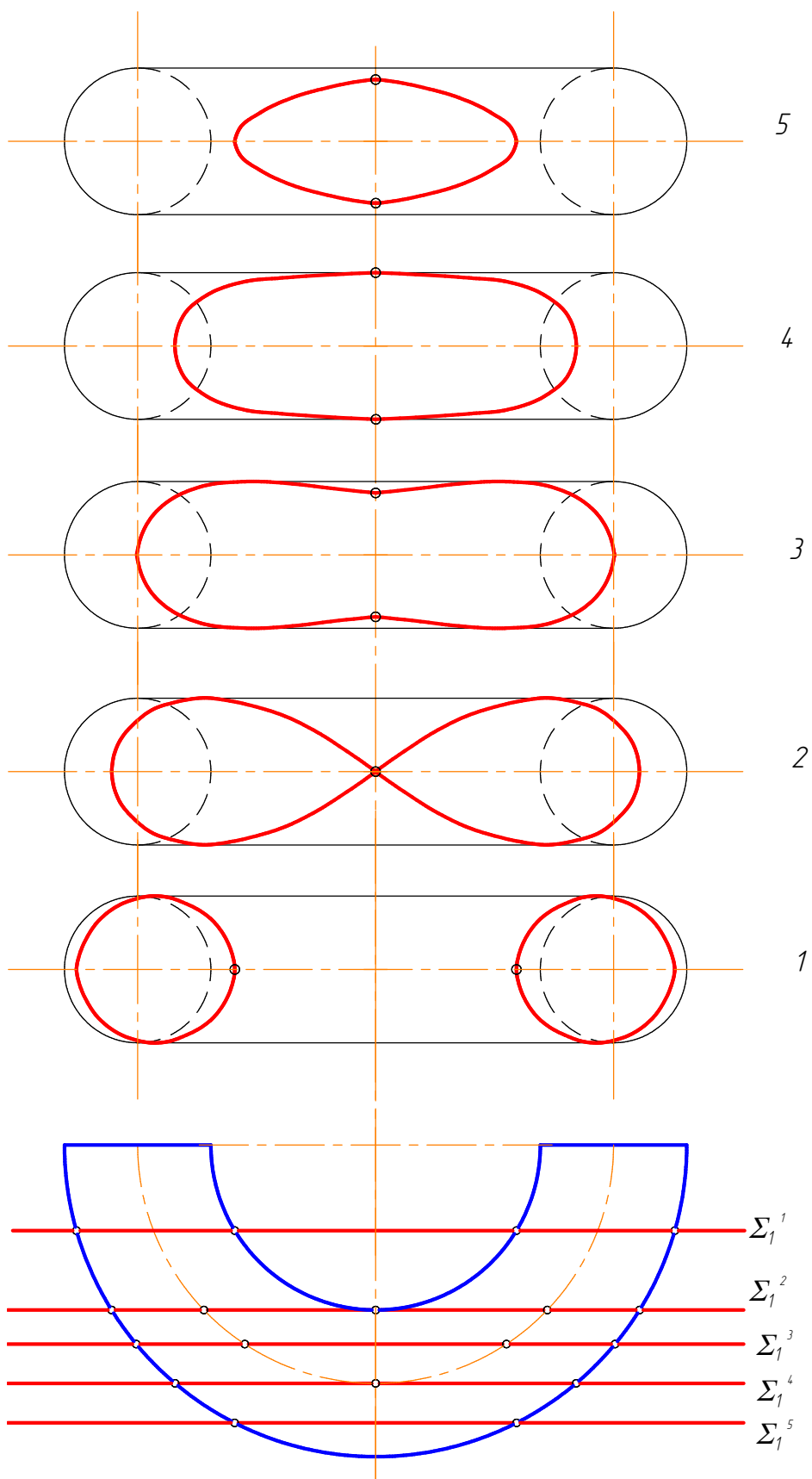


Рисунок 2.34 – Виды линий пересечения тора плоскостью  $\Sigma$

## 2.4 Третий алгоритм.

**Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры - непроецирующие.**

В данном случае задача усложняется тем, что на чертеже нет **главной проекции** ни у одной из пересекающихся фигур. Поэтому для решения таких задач специально вводят **вспомогательную секущую поверхность-посредник**, которая пересекает обе фигуры, выявляя общие точки. Эта **поверхность-посредник** может быть **проецирующей** и тогда решение задачи можно свести ко **второму алгоритму**, или **непроецирующей** (например, сфера – посредник). Решение **первой** и **второй** ГПЗ рассмотрим отдельно.

### 2.4.1 Решение 1ГПЗ

Для нахождения точек пересечения прямой с поверхностью в качестве поверхности-посредника чаще всего берут проецирующую плоскость, которую проводят через данную прямую. Далее находят линию пересечения этой плоскости с поверхностью, используя **2 алгоритм**, и определяют точки пересечения полученной линии с данной прямой. Эти точки и будут являться точками пересечения поверхности с прямой (рис. 2.35).

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере.

**Задача:** Найти точку пересечения плоскости  $\Gamma(ABC)$  с прямой  $a$ .

Определить видимость прямой, (рис. 2.36).

**Алгоритм:**

1. Возьмём **плоскость-посредник**  $\Sigma$  так, чтобы она включала в себя прямую  $a$  и была бы проецирующей, например, относительно  $\Pi_1$ . Тогда  $\Sigma_1$  совпадёт с  $a_1$ , (рис. 2.37 а, б).

2. Пересекаем проецирующую плоскость  $\Sigma$  с плоскостью общего положения  $ABC$ , результатом будет прямая  $m$ . Задачу решаем по **2 алгоритму**:  $m_2$  совпадает с  $\Sigma_2$ ,  $m_1$  находим по принадлежности плоскости  $ABC$ .  $m = l_2 \Rightarrow m_2 = l_2 \Rightarrow m_1 = l_1$ .

3.  $m_1$ , пересекаясь с  $a_1$ , даёт нам точку  $K_2 \Rightarrow K_1$ .

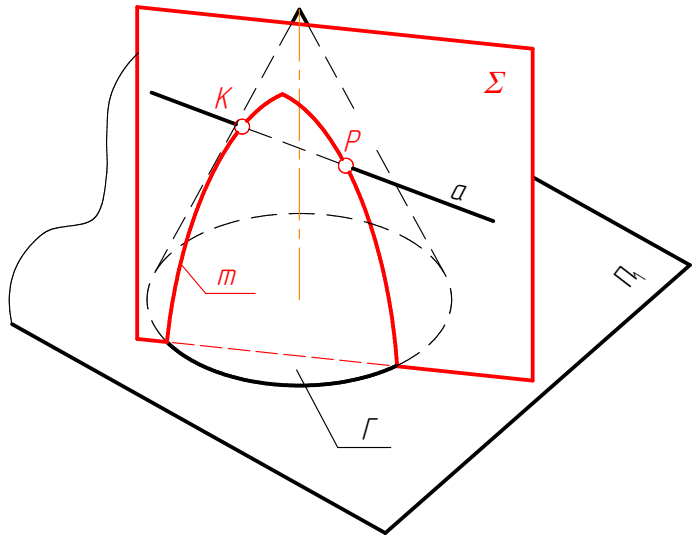


Рисунок 2.35 – Пространственное решение задачи нахождения точек пересечения прямой с поверхностью

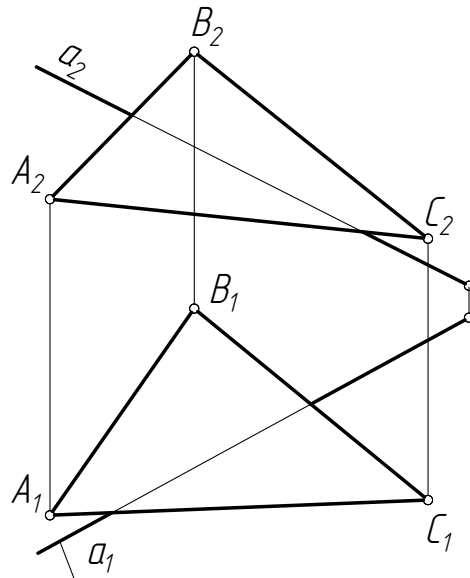


Рисунок 2.36 – Условие задачи

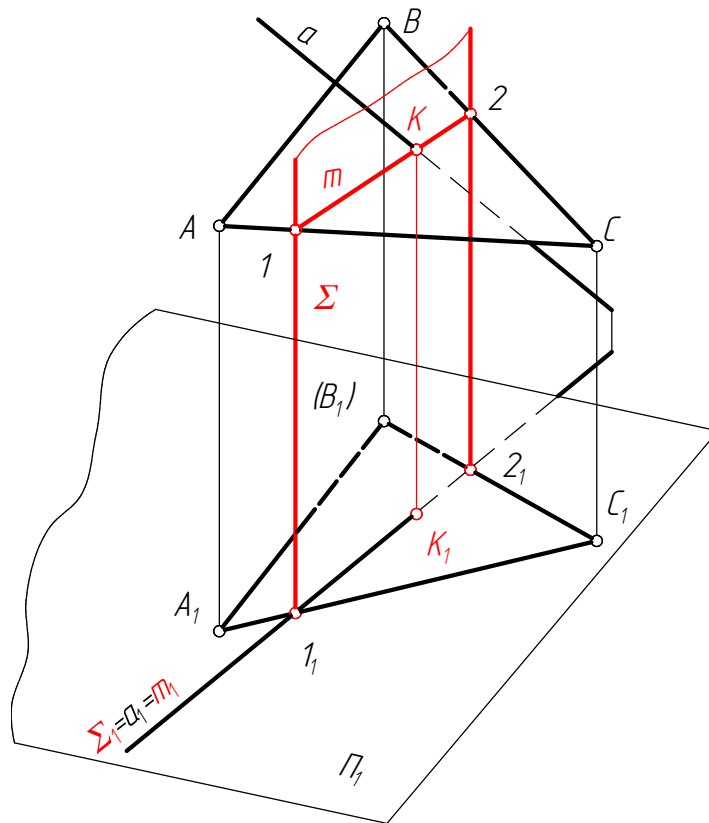


Рисунок 2.37,а – Пространственное решение задачи нахождения точки  $K$  пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\Delta (ABC)$

4. Видимость прямой  $a$  определяем методом **конкурирующих точек** (рис. 2.37 б):

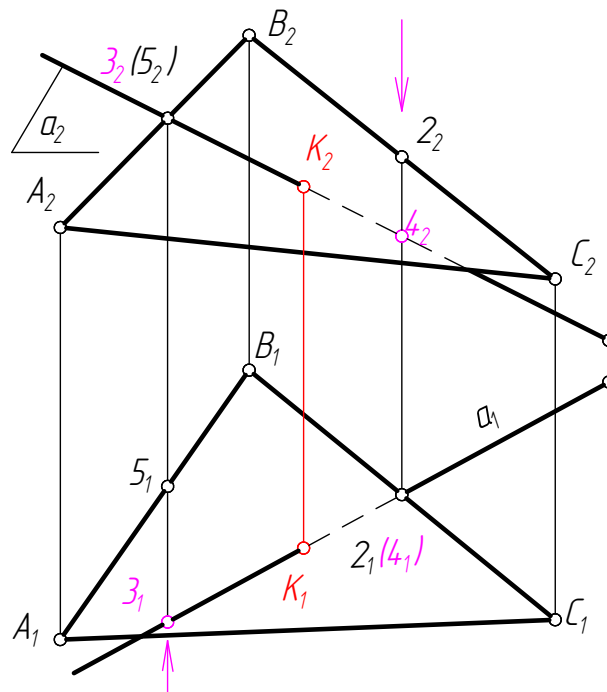


Рисунок 2.37,б – Определение видимости участков прямой  $a$

**Видимость относительно  $\Pi_2$ :**

Точка  $5 \in AB$ ,  $3 \in a$  – фронтально конкурирующие. На  $\Pi_2$  видна точка  $3 \Rightarrow$  участок прямой  $a$  слева от точки  $K_2$  – видимый.

**Видимость относительно  $\Pi_1$ :**

Точка  $2 \in BC$ , точка  $4 \in a$  – горизонтально конкурирующие. На  $\Pi_1$  видна точка  $2 \Rightarrow$  участок прямой  $a$  справа от точки  $K_1$  до точки  $4_1$  – невидимый.

Выполним краткую алгоритмическую запись решения задачи:

$\Gamma(ABC) \cap a = K$ . 1 ГПЗ, 3 алгоритм.

1.  $\Sigma$  – плоскость-посредник,  $\Sigma \supset a$ ,  $\Sigma \parallel \Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1 = a_1$ ;
2.  $\Sigma \cap \Gamma = m$ . 2 ГПЗ, 2 алгоритм.  $\Sigma \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 = \Sigma_1$ ;  $m_2 \subset \Gamma$ ;
3.  $m_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1$ .

Такой алгоритм решения приемлем для нахождения точек пересечения любой поверхности с прямой линией. Разница заключается в форме линии  $m$ , которая является результатом пересечения **плоскости-посредника** с заданной поверхностью и зависит от вида поверхности. В рассмотренном примере  $m$  – это прямая линия. Если вместо плоскости  $\Gamma(ABC)$  возьмём, например, **сферу**, то линия  $m$  будет являться **окружностью**, которая может проецироваться на какую-либо плоскость проекций в виде **эллипса**, если с прямой пересекается **многогранник**, то  $m$  – это **плоский многоугольник** и т.д. Подробнее рассмотрим один из таких примеров, используя указанный алгоритм решения.

**Задача:** Найти точки пересечения пирамиды  $\Gamma(SABC)$  с прямой  $a$  (рис. 2.38). Определить видимость прямой.

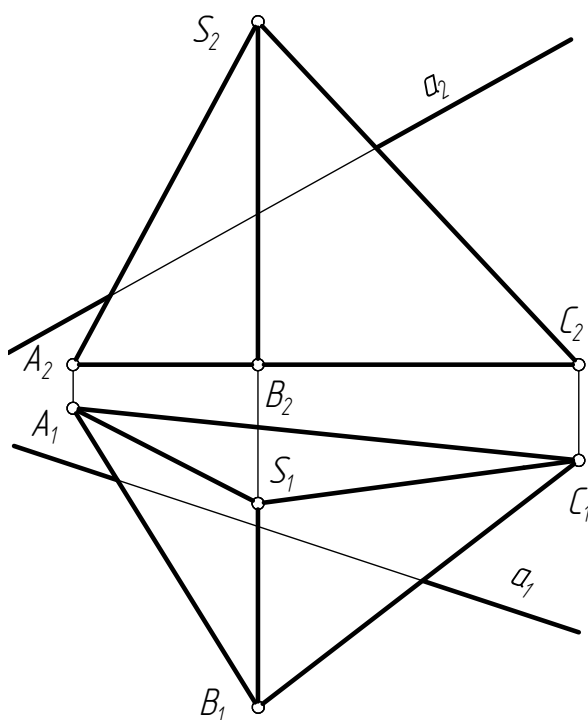


Рисунок 2.38 – Условие задачи

1. Через прямую  $a$  проведём плоскость-посредник  $\Sigma$ , проецирующую относительно  $\Pi_2$  (рис. 2.39,а, б).  $\Sigma_2 = a_2$ .

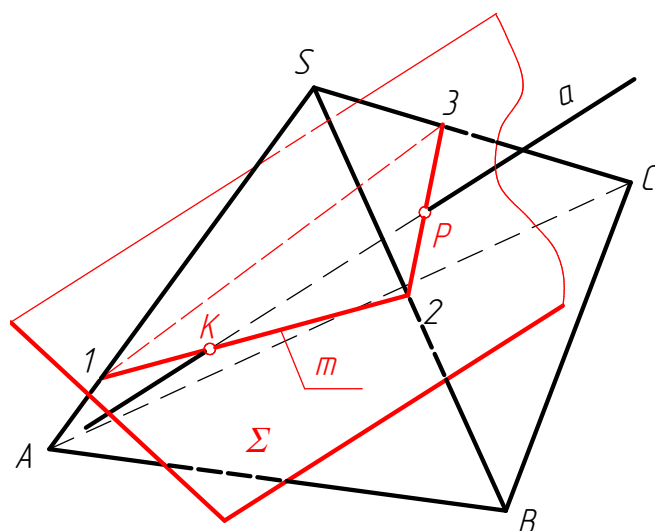


Рисунок 2.39,а – Первый пункт алгоритма решения задачи

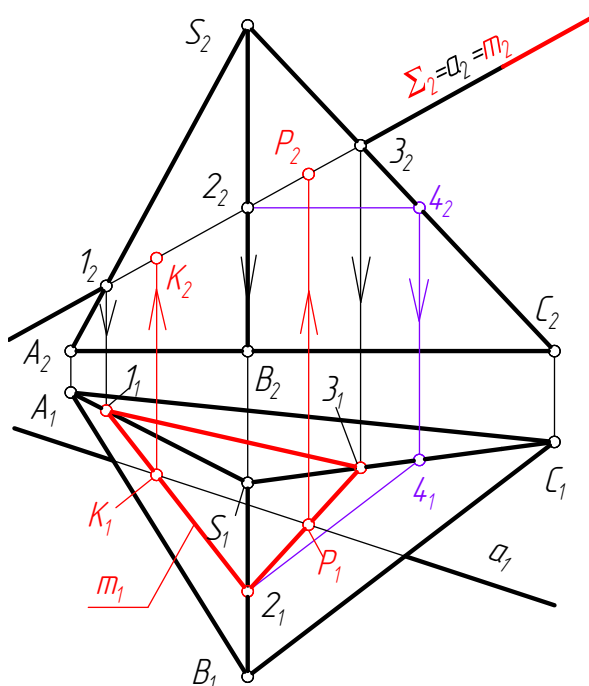


Рисунок 2.39,б – Второй и третий пункты алгоритма решения задачи

2. Пересекаем плоскость  $\Sigma$  с пирамидой. Результатом является замкнутая ломаная линия  $m(1,2,3)$  – треугольник. Согласно **2 алгоритму**, горизонтальную проекцию треугольника строим по принадлежности пирамиде. Точки  $1_1$  и  $3_1$  находим с помощью линий связи на соответствующих рёбрах  $SA$  и  $SC$ . Точку  $2_1$  находим по принадлежности плоскости треугольника  $SBC$  с помощью вспомогательной прямой  $24$ , параллельной  $BC \Rightarrow 2_14_1 \parallel B_1C_1$ .

3.  $m_1(1_1,2_1,3_1)$ , пересекаясь с  $a_1$ , даёт нам точки  $K_1$  и  $P_1 \Rightarrow K_2, P_2$ .

4. Определяем видимость прямой на обеих проекциях (рис. 2.40). Невидимый участок прямой расположен между точками  $K$  и  $P$ .

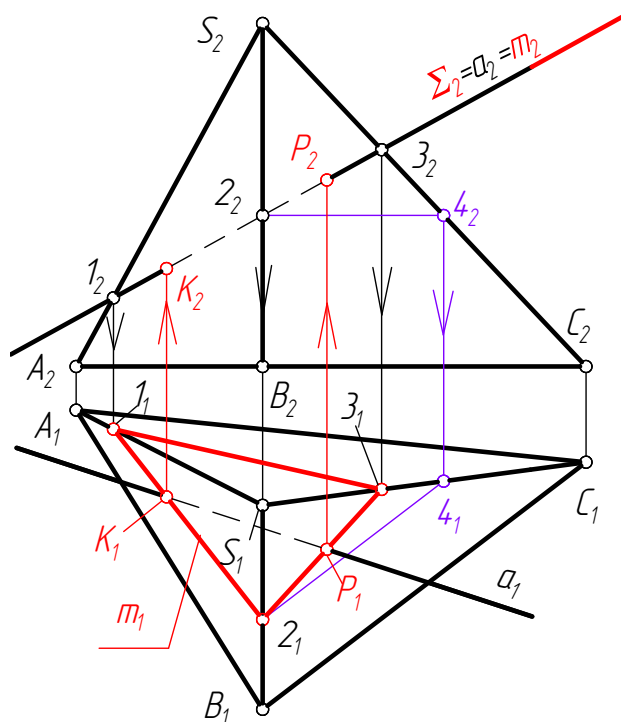


Рисунок 2.40 – Определение видимости прямой на обеих проекциях

**Выполним алгоритмическую запись решения:**

$\Gamma(SABC) \cap a = K, P$ . 1 ГПЗ, 3 алгоритм.

1.  $\Sigma$  - плоскость-посредник,

$\Sigma \supset a$ ,  $\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2 = a_2$ ;

2.  $\Sigma \cap \Gamma = m(123)$ . 2 ГПЗ, 2 алгоритм,

$\Sigma \perp \Pi_2 \Rightarrow m_2(1_2, 2_2, 3_2) = \Sigma_2$ ;

$m_1(1_1, 2_1, 3_1) \subset \Gamma$ ;

3.  $m_1(1_1, 2_1, 3_1) \cap a_1 = K_1, P_1 \Rightarrow K_2, P_2$ .

**Вывод:** все задачи на пересечение **непроецирующей** прямой с любой **непроецирующей** поверхностью решаются по единственному – **третьему алгоритму**, с помощью **плоскости-посредника**.

## 2.4.2 Решение 2ГПЗ (в случае пересечения непроецирующих фигур)

Чтобы построить линию пересечения двух непроецирующих поверхностей, нужно выполнить следующие операции:

1. Задать поверхность-посредник (напоминаем, что в этом качестве чаще всего берут проецирующую плоскость);
2. Построить линии пересечения  $a$  и  $b$  поверхности-посредника с заданными поверхностями;
3. Найти точки пересечения построенных линий;
4. Повторять построения столько раз, сколько необходимо для того, чтобы линия пересечения поверхностей выявилась полностью;
5. Определить видимость линии пересечения  $m$  и самих поверхностей.

Следует напомнить, что:

- а) Решение **2 ГПЗ** необходимо начинать с анализа характера пересечения поверхностей для определения **количества** линий пересечения  $m^1$ ;
- б) Плоскость-посредник необходимо выбирать так, чтобы она пересекала обе поверхности по графически простым линиям - **прямым** или **окружностям**.

Рассмотрим алгоритм решения на пространственной модели (рис. 2.41):

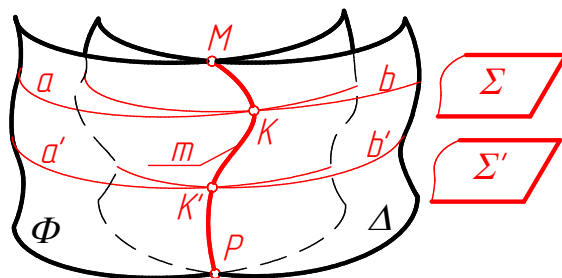


Рисунок 2.41 – Алгоритм решения задачи на пространственной модели

1.  $\Phi \cap \Delta = m$ ; 2ГПЗ, 3 алгоритм .
2. Отмечаем очевидные точки пересечения –  $M$  и  $P$ .
3. Вводим плоскость-посредник  $\Sigma$  (как правило - проецирующую.)
4.  $\cap \Phi = a$ ;  $\Sigma \cap \Delta = b$ ;
5.  $a \cap b = K$ .
6. Для построения линии  $m$  нужно найти такое количество точек, которое определяет данную линию. Для этого вводим несколько плоскостей-посредников.
7. Определяем видимость линии пересечения  $m$  и поверхностей.

**Задача:** Построить линию пересечения конуса  $\Phi$  со сферой  $\Delta$  (рис. 2.42).

**Алгоритм: 2ГПЗ , третий алгоритм.**

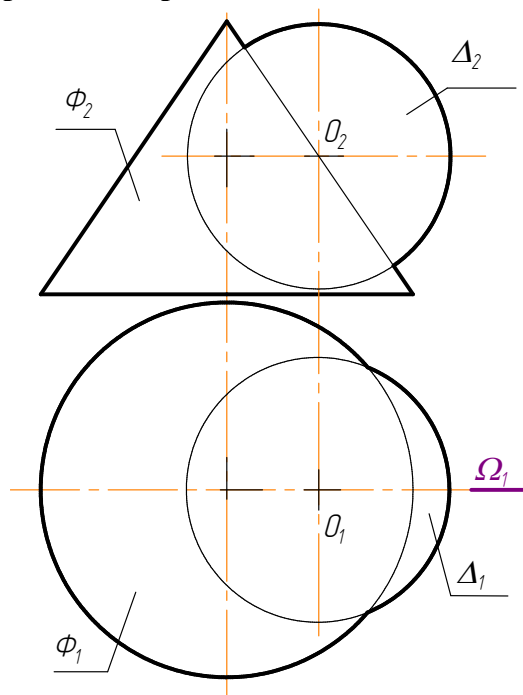


Рисунок 2.42 – Условие задачи

1. Вначале определяем, **что** должно быть общим элементом в результате пересечения и **количество** общих элементов. Пересекаются две поверхности вращения второго порядка, характер пересечения – **вмятие**, следовательно, должна получиться **одна** пространственная кривая линия ***m***.

Кроме того, поверхности имеют общую плоскость симметрии (это плоскость фронтального меридиана  $\Omega$ ). Это означает, что линия пересечения симметрична относительно плоскости  $\Omega$ , и на  $\Pi_2$  две её ветви должны слиться в одну видимую линию.

2. Построения начинаем с характерных точек (рис.2.43), не требующих дополнительных построений для их нахождения. К ним относятся точки  $M$  и  $P$ , лежащие в плоскости  $\Omega$  и принадлежащие очерковым образующим конуса и сферы на  $\Pi_2 - M_2$  и  $P_2$ .  $M_1$  и  $P_1$  находим с помощью линии связи.

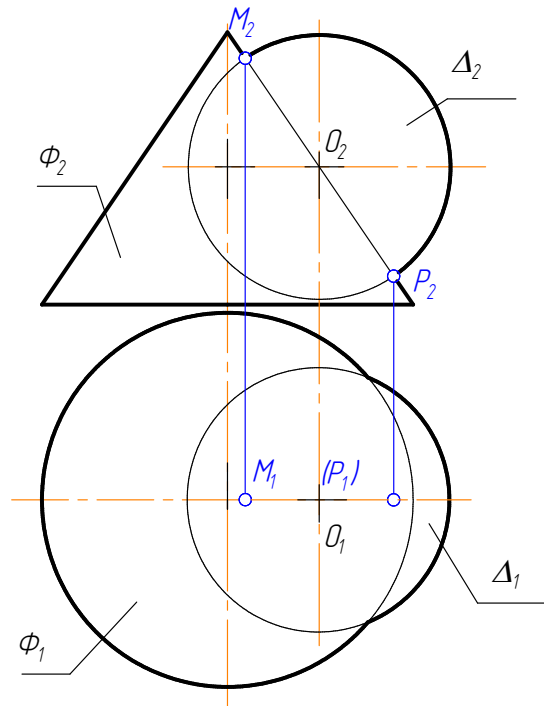


Рисунок 2.43 – Построение характерных точек

3. Все остальные точки находим одинаково: задаём плоскость-посредник  $\Sigma$  (рис. 2.44). В её качестве выбираем горизонтальную плоскость уровня  $\Sigma_2$ . Эта плоскость пересекает конус  $\Phi$  по окружности  $a$ , радиусом  $R_1$  (от оси до очерка конуса). Проводим на  $\Pi_1$  эту окружность  $a_1$  из центра конуса  $S_1$ .



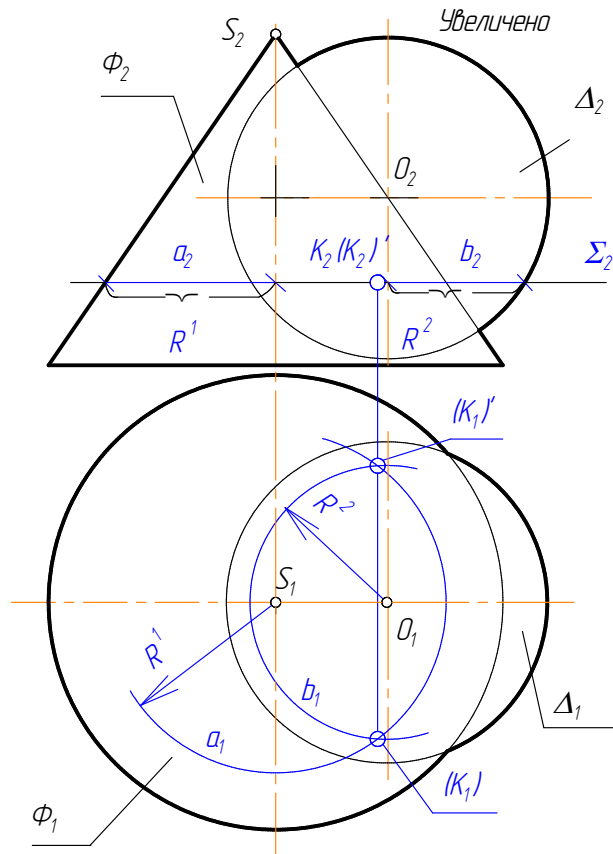


Рисунок 2.44 – Технология построения промежуточных точек

Эта же плоскость пересекает сферу  $\Delta$  по окружности  $b$ , радиусом  $R_2$  (от оси до очерка сферы). Проводим на  $\Pi_1$  эту окружность  $b_1$  из центра  $O_1$  сферы.

Окружности, пересекаясь, дают нам точки  $K_1$  и  $K_1'$ , принадлежащие линии пересечения  $m$ .  $K_2$  и  $K_2'$  находим с помощью линии связи по принадлежности плоскости  $\Sigma$ . Остальные точки находим аналогично. 4. Видимость горизонтальной проекции линии пересечения определяют точки  $A$  и  $A'$ , лежащие в плоскости экватора  $c$  сферы (рис. 2.45). На  $\Pi_1$  они принадлежат окружности  $c_1$ . Все точки, расположенные ниже  $A_2$  и  $A_2'$ , на  $\Pi_1$  будут невидимыми, в том числе и точки  $P_1$ ,  $K_1$  и  $K_1'$ .

5. Крайние левые точки  $B$  и  $B'$  находим в плоскости  $\Sigma'$ , проходящей через точку встречи левой очерковой образующей конуса с перпендикуляром, проведённым из точки пересечения оси конуса с плоскостью экватора сферы (рис. 2.46). Построения проводим так, как описано в п. 3.

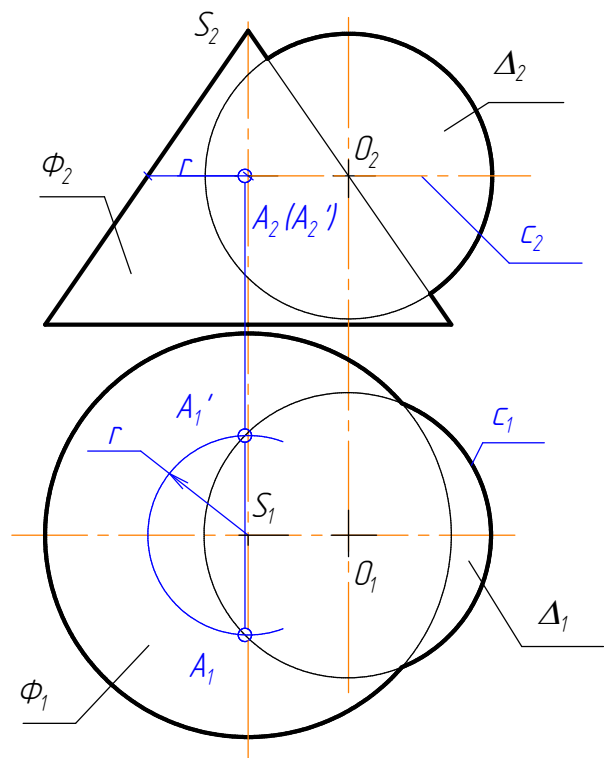


Рисунок 2.45 – Определение видимости горизонтальной проекции линии пересечения

6. Конечный результат построений с учётом видимости линии пересечения и самих поверхностей приведен на рисунке 2.47. Как мы и предполагали на основе анализа в п. 1, линия пересечения  $m$  одна, симметрична относительно плоскости фронтального меридиана  $\Omega$ , симметричные ветви её на  $\Pi_2$  слились в одну видимую линию.

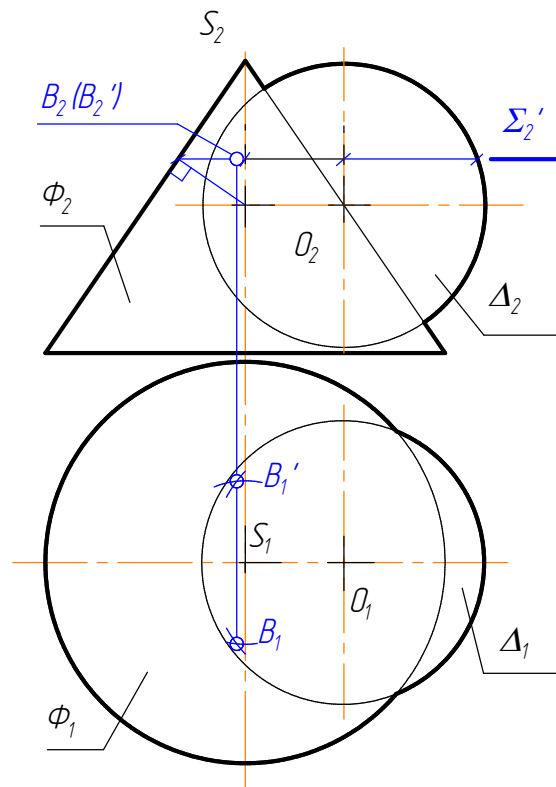


Рисунок 2.46 – Определение крайних левых точек  $B$  и  $B'$

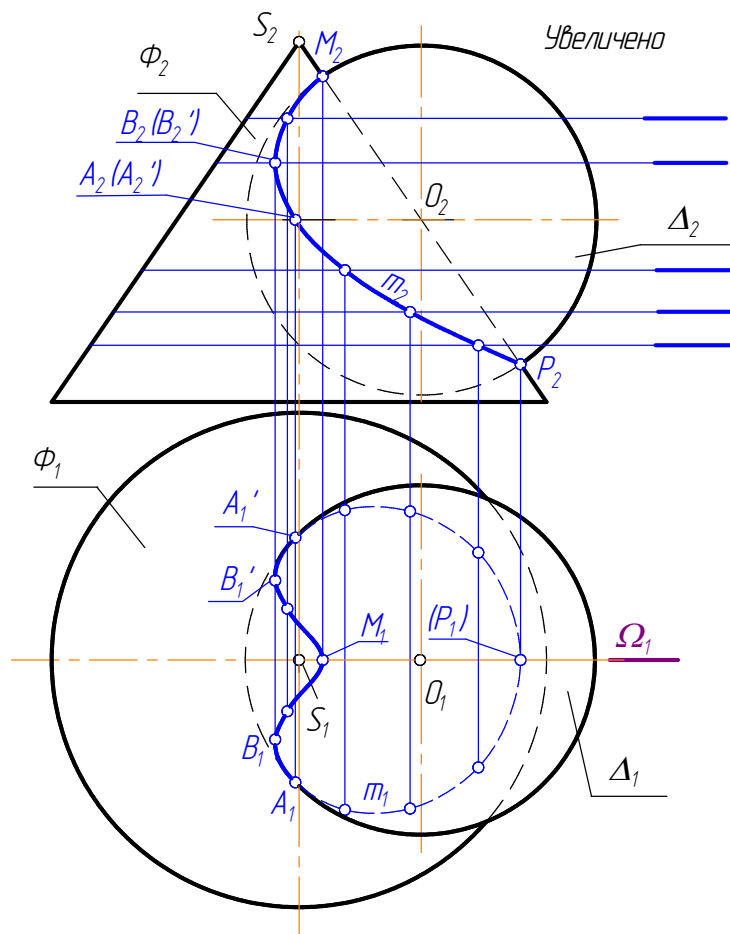


Рисунок 2.47 – Конечный результат построений с учётом видимости линии пересечения и самих поверхностей

Алгоритмическая запись решения:

$\Phi \cap \Delta = m$ . 2ГПЗ, 3 алгоритм .

1. Точки  $M$  и  $P \in \Omega \Rightarrow M_2; P_2 \Rightarrow M_1; P_1$ .

2.  $\Sigma$  - плоскость-посредник;  $\Sigma \parallel \Pi_1$ ,

3.  $\Sigma \cap \Phi = a \Rightarrow a_1; \Sigma \cap \Delta = b \Rightarrow b_1; b_1 \cap a_1 = K_1; K_1' \Rightarrow K_2; K_2'$ .

4. Аналогично строим остальные точки:  $m_1 \Rightarrow m_2$ .

5. Видимость  $m$  относительно  $\Pi_1$ : точки  $A, A' \in c$ .

**Вывод:** Решение 2ГПЗ в случае пересечения непроецирующих фигур проводят по единому - **третьему алгоритму** и осуществляют с помощью плоскостей-посредников, которых берётся такое количество, чтобы линия пересечения выявилась полностью.

## 2.4.3 Частные случаи пересечения поверхностей вращения второго порядка

### 2.4.3.1 Пересечение соосных поверхностей вращения.

1. Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения:  $\Gamma \cap \Delta = m$ ;  $n$  – окружности (рис. 2.48).

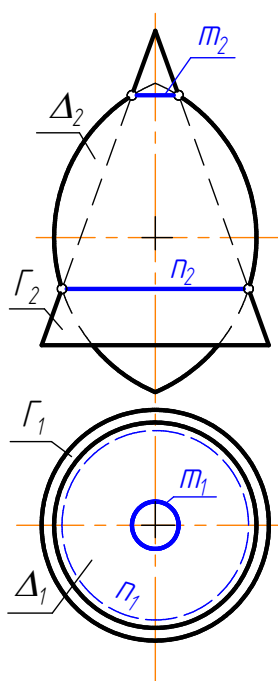


Рисунок 2.48 – Пересечение соосных поверхностей вращения

2. Если центр сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечёт эту поверхность по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения:  $\Phi \cap \Lambda = m$ ;  $n$  – окружности (рис. 2.49).

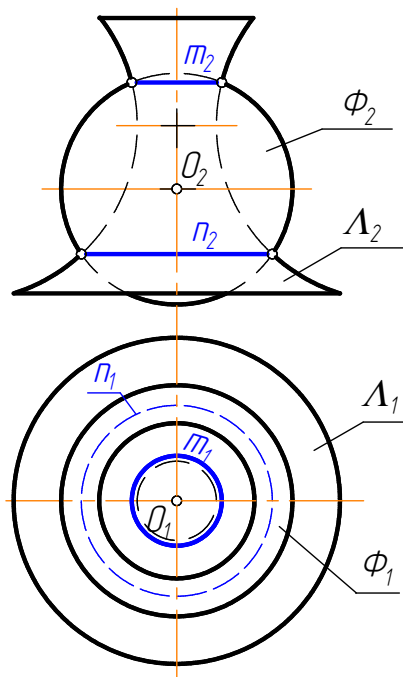


Рисунок 2.49 – Пересечение соосных поверхностей вращения  
(если центр сферы находится на оси поверхности вращения)

### 2.4.3.2. Теорема Монжа

*Если две поверхности вращения второго порядка описаны около третьей поверхности вращения второго порядка, или вписаны в неё, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.*

Причём, плоскости кривых проходят через прямую, соединяющую точки двойного соприкосновения.

На рисунке 2.50 теорема Монжа проиллюстрирована пересечением двух конусов  $\Sigma$  и  $\Gamma$ , в которые вписана сфера  $\Phi$ . Чтобы вписать сферу, проводим перпендикуляры к очерковым образующим конуса  $\Gamma(\Gamma_2)$  из точки  $O_2$ :  $O_2P_2 = O_2K_2$  – радиус сферы (рис. 2.50,а). Точки  $M$  и  $N$  (рис. 2.50,б) – это точки, в которых касаются все три поверхности.

В результате получаются два эллипса  $a$  и  $b$ , которые проходят через точки  $M$  и  $N$  (рис. 2.50,в). На  $\Pi_I$  эти эллипсы построены по принадлежности конусу  $\Gamma$  (построения не показаны).

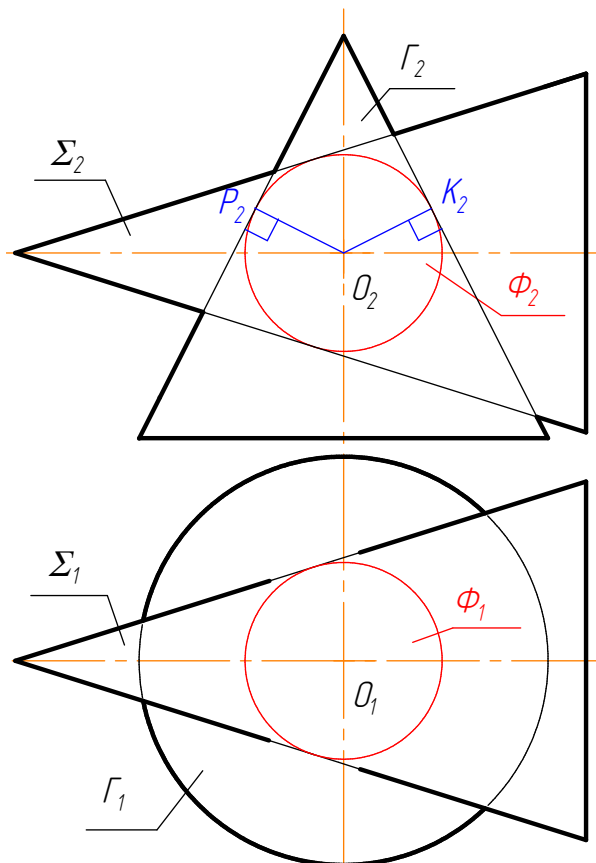


Рисунок 2.50,а – Условие задачи на пересечение двух конусов  $\Sigma$  и  $\Gamma$  (теорема Монжа)

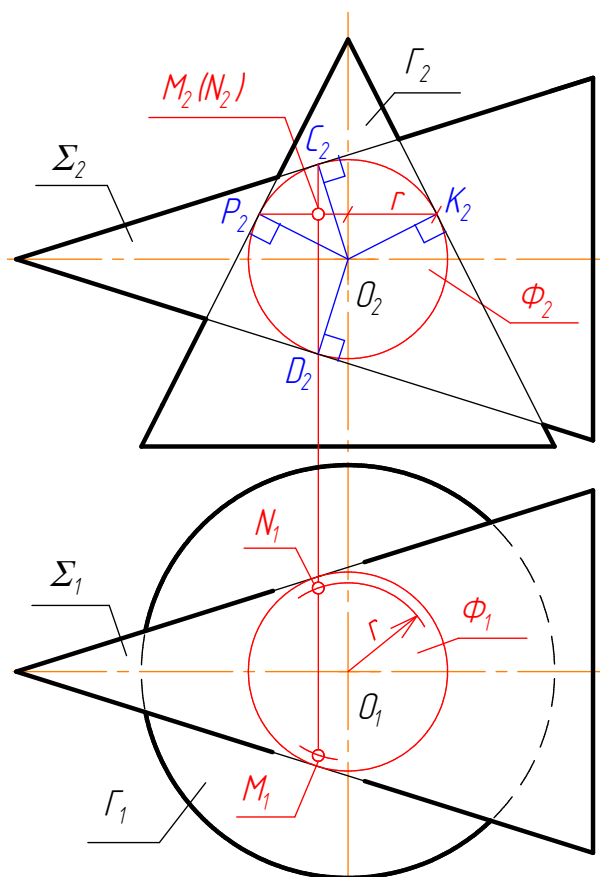


Рисунок 2.50.б – Определение радиуса вписанной сферы и точек  $M$  и  $N$  в которых касаются все три поверхности

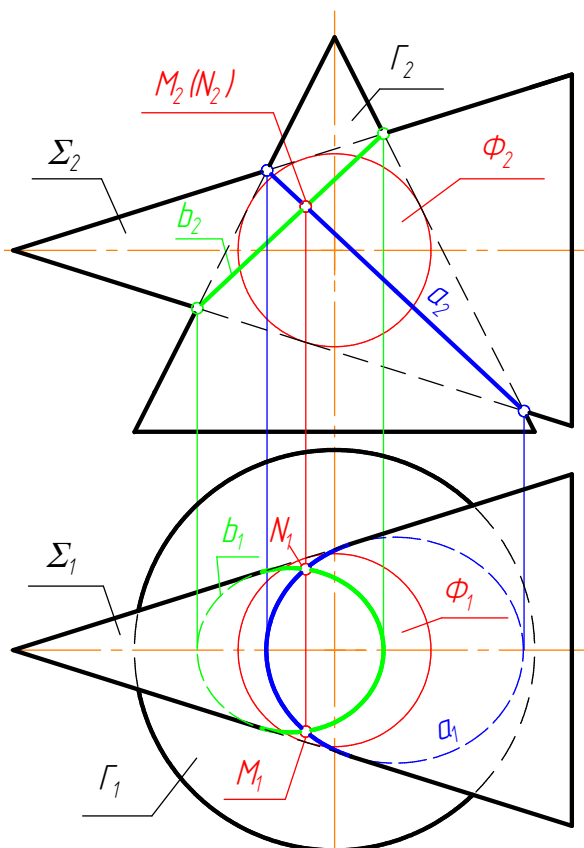


Рисунок 2.50,в – Результат решения задачи (получаются два эллипса  $a$  и  $b$ , которые проходят через точки  $M$  и  $N$ )

**Как Вы думаете?**

1. Всегда ли при решении позиционных задач совпадают случаи расположения геометрических фигур относительно плоскостей проекций и соответствующие алгоритмы решения?
2. По какому алгоритму Вы будете решать задачу, представленную на рисунке. 2.51?

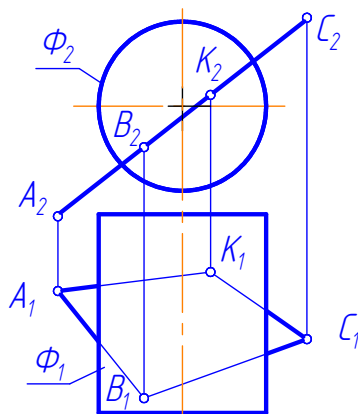


Рисунок 2.51 – Условие задачи к п. 2

$$\Phi \cap ABCK = ?$$

$$\Phi \perp \Pi_2; ABCK \perp \Pi_2.$$

Проанализируйте расположение цилиндра и плоскости относительно плоскостей проекций и обоснуйте выбор алгоритма решения. **Решите задачу.**

## 2.4.4 Выводы:

1. Все главные позиционные задачи делятся на две:

**1ГПЗ** – пересечение линии с поверхностью (плоскостью);

**2ГПЗ** – пересечение поверхностей (плоскостей).

2. Выбор алгоритма решения зависит от расположения фигур относительно плоскостей проекций. Существует три случая расположения пересекающихся фигур относительно плоскостей проекций:

- обе фигуры проецирующие – задача решается по **1 алгоритму**,

- одна фигура проецирующая, вторая непроецирующая – задача решается по **2 алгоритму**,

- обе фигуры непроецирующие – задача решается по **3 алгоритму**.

3. Бывает, что случаи расположения фигур относительно плоскостей проекций и алгоритм решения не совпадают. Это случается тогда, когда обе пересекающиеся фигуры являются проецирующими, но относительно одной и той же плоскости проекций, такие задачи решаются по **2 алгоритму** (например, рис. 2.51).

4. Решение считается выполненным тогда, когда определена видимость общих элементов и пересекающихся фигур.

## 2.4.5 Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются позиционными?
2. Какая линия может получиться при пересечении многогранника с поверхностью вращения?
3. От чего зависит количество общих элементов при решении 2ГПЗ?
4. От чего зависит выбор алгоритма решения главных позиционных задач?
5. Что может получиться при пересечении конуса различными плоскостями?
6. Какие частные случаи пересечения поверхностей вращения Вы знаете?
7. Сформулируйте теорему Монжа.

## 2.4.6 Тест № 1

1	2	3	4	5

1. На каком чертеже представлена 1ГПЗ?
2. Для решения какой задачи необходимо использовать теорему Монжа?
3. Для решения какой задачи необходимо использовать только одну плоскость-посредник?
4. Для решения какой задачи необходимо использовать две плоскости-посредника?
5. В каком случае результатом пересечения является один эллипс?
6. В каком случае результатом пересечения являются два эллипса?

7. На каком чертеже характер пересечения поверхностей - вмятие?
8. Какая из задач решается по второму алгоритму?
9. В каком случае результатом пересечения является прямая линия?
10. В каком случае результатом пересечения является пространственная линия?

#### **2.4.7 Ответы на тест № 1**

1 - 3; 2 - 1; 3 - 3; 4 - 5; 5 - 4; 6 - 1; 7 - 2; 8 - 4; 9 - 5; 10 - 2.

Ответ на задачу (рис. 2.34) : Верно.



### Список источников

1. Бубенников А. В. Начертательная геометрия : учеб. для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1985. – 288 с. ил.
2. Бубенников А. В. Начертательная геометрия. Задачи для упражнений : учеб. пособие. – Москва : Высш. шк., 1981 – 296 с. ил.
3. Вилицкий И. Г. Начертательная геометрия : учебник для вузов. – Москва : Высш. шк., 1975. – 280 с.
4. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии : учеб. пособие / В. О. Гордон, М. А. Семенов-Огиевский ; под ред. Ю. Б. Иванова. – 23-е изд. перераб. – Москва : Наука, 1988. – 272 с.
5. Королев Ю. И. Начертательная геометрия : учеб. для вузов. – Москва : Стройиздат, 1987. – 319 с.: ил.
6. Королев Ю. И. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / Ю. И. Королев. – Санкт-Петербург : Питер, 2006. – 252 с.
7. Климухин А. Г. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Стойиздат, 1978. – 334 с.
8. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, В. Е. Васильев; под ред. Н. Н. Крылова. – 7-е изд. перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 2001
9. Лагерь А. И. Инженерная графика : учеб. для инж.-техн. спец. вузов. / А. И. Лагерь, Э. А. Колесникова. – Москва : Высш. шк., 1985 – 176 с.
10. Михайленко В. Є. Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник / В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов; за ред. В. Є. Михайленка. – Киев : Каравела, 2010. – 360 с.
11. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, Н. М. Лаврухина; под ред. Н. Н. Крылова. – 6 изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 240 с. ил.
12. Павлова А. А. Начертательная геометрия: Учебник для студентов педагогических институтов по специальности №03.02 (2120) «Труд» («Общетехнические дисциплины и труд»). – Москва : Прометей, 1993. – 280 с.: ил.
13. Современный курс начертательной геометрии: [Учеб. для вузов по направлению «Авиа-и ракетостроение» по всем инж. спец.] / [Л. Г. Нартова, А. М. Тевлин, В. С. Полозов, В. И. Якунин;] Под ред. Нартовой Л. Г., Тевлина А. М. – Москва : МАИ, 1996. – 253 с. ил. ISBN 5-7035-1367-7
14. Фролов С. А. Начертательная геометрия : учебник для вузов / С.А. Фролов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИНФРА-М, 2007. – 286 с.
15. Начертательная геометрия : учебн. пособие: в 3-х содержательных модулях / В. И. Лусь; Харьк. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ, 2014. – Содержательный модуль №1. Точка, линия, плоскость. – 2014. – 65 с.

*Навчальне видання*

**ЛУСЬ** Володимир Іванович

## НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

### МОДУЛЬ 1

(Змістовий модуль № 3 – Поверхні. Точка і лінія на поверхні.  
Взаємний перетин поверхонь)

### НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

(Рос. мовою)

Відповідальний за випуск *Т. Є. Киркач*

Редактор *З. І. Зайцева*

Комп'ютерне верстання *С. М. Швидкий*

Підп. до друку 17.06.2015 р.  
Друк на ризографі  
Тираж 50 пр.

Формат 210×297  
Ум. друк. арк. 5,2  
Зам. №

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.